

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAÎTRISE EN GÉNIE DE LA PRODUCTION AUTOMATISÉE  
M.Ing.

PAR  
HAKIM MECHERI

ESTIMATION DE L'AXE HÉLICOÏDAL FINI ET INSTANTANÉ À PARTIR DE  
DONNÉES CINÉMATIQUES : ÉTUDE COMPARATIVE

MONTREAL, LE 20 AVRIL 2005

(c) droits réservés de Hakim Mecheri

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Rachid Aissaoui, directeur de mémoire  
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

M. Pascal Bigras, président du jury  
Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

M. Yvan Petit, membre du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC  
LE 20 AVRIL 2005  
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

# ESTIMATION DE L'AXE HÉLICOÏDAL FINI ET INSTANTANÉ À PARTIR DE DONNÉES CINÉMATIQUES : ÉTUDE COMPARATIVE

Hakim Mecheri

## SOMMAIRE

L'axe hélicoïdal avec ses deux versions, fini (AHF) et instantané (AHI) est largement utilisé en biomécanique pour la modélisation du mouvement articulaire. Il a été utilisé pour comparer les performances de différentes prothèses, pour comparer le mouvement articulaire pathologique et sein, pour faire le suivi de l'évolution des pathologies, pour évaluer l'efficacité d'un traitement ou d'une intervention chirurgicale.

Dans la littérature, on retrouve plusieurs algorithmes pour l'estimation de l'axe hélicoïdal à partir de données cinématiques, et la question qui se pose est la suivante : ces algorithmes sont-ils équivalents ? En d'autres termes, les résultats et par conséquence leur interprétation est elle sensible à l'algorithme choisi ?

À ce jour, il n'y a que très peu d'études comparatives et elles ne répondent que partiellement à la question citée plus haut.

L'objectif général de ce travail est la comparaison et la validation de huit méthodes d'estimation de l'AHF et de quatre méthodes d'estimation de l'AHI. Ces méthodes sont basées sur les trajectoires d'au moins trois points non colinéaires d'un corps rigide en mouvement. Ce travail comporte trois parties comparatives. Les comparaisons sont effectuées dans un contexte d'une simulation Monté Carlo et d'une validation expérimentale. Les première et deuxième parties concernent les huit méthodes de l'AHF et les quatre méthodes de l'AHI respectivement. La troisième consiste à évaluer l'approximation de l'AHI par l'AHF.

Les résultats démontrent que le filtrage et le nombre de marqueurs ont des répercussions directes sur la précision des paramètres estimés de l'axe, que les huit méthodes d'estimation de l'AHF ne sont pas équivalentes et peuvent être classées suivant leurs précisions en trois classes. Les quatre méthodes d'estimation de l'AHI quant à elles peuvent être divisées en deux classes. Finalement, l'approximation de l'AHI par sa contrepartie l'AHF s'avère acceptable pour des fréquences d'échantillonnage de l'ordre de 100 Hz et pour des mouvements présentant une vitesse angulaire maximale de l'ordre de 2 rad/s.

# **ESTIMATION OF THE FINITE AND INSTANTANEOUS HELICAL AXIS FROM KINEMATIC DATA: A COMPARATIVE STUDY**

Hakim Mecheri

## **ABSTRACT**

The instantaneous helical axis (IHA) concept and his finite counterpart (FHA) are widely used in biomechanics. It is used to compare the performance of different prosthesis, to compare healthy and pathological joints, to study the progression of pathologies by comparing movements' amplitude, to asses the effectiveness of a treatment or a chirurgical act.

There are many algorithms based on kinematics data to estimate helical axis, in the literature. The question is: are these algorithms equivalent?

To date, there are no many comparative studies to answer this question, and the few that exists just give a partial answer.

The scope of this work is to compare and validate eight algorithms for the estimation of the finite helical axis (FHA) and four algorithms for the estimation of the instantaneous helical axis (IHA). These algorithms are based on the trajectories of at least three non collinear markers attached to the moving rigid body. There are three distinct parts in this study. The first and second ones consist on the evaluation and comparison of the FHA's and IHA's algorithms respectively, under a Monte Carlo simulation and an experimental validation. The third part was to evaluate the approximation of the IHA by its finite counterpart (FHA).

The results showed that the filtering process and the number of markers influence the estimation of the helical axis. The eight algorithms for the FHA estimation can be divided on three classes depending on their accuracies. The four IHA's algorithms can be divided on two classes. The approximation of the IHA by the FHA is acceptable for sampling frequencies around 100 Hz and movements with maximum angular velocity around 2 rad/s.

## **REMERCIEMENTS**

Ce mémoire a été effectué sous la direction du professeur Rachid Aissaoui, que je remercie sincèrement pour son soutien technique et moral. Je remercie aussi tous les membres du LIO (laboratoire de recherche en imagerie et orthopédie) de l'École de technologie supérieure pour leur accueil.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	i
ABSTRACT .....	ii
REMERCIEMENTS.....	iii
TABLE DES MATIÈRES .....	iv
LISTE DES TABLEAUX .....	vii
LISTE DES FIGURES .....	viii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES .....	iv
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 NOTIONS SUR LE CORPS RIGIDE .....	4
1.1 Introduction .....	4
1.2 Représentation d'un déplacement fini d'un corps rigide .....	4
1.2.1 Matrice de rotation .....	5
1.2.2 Matrice de transformation homogène .....	7
1.2.3 Angle d'Euler/Cardan .....	7
1.2.4 Quaternion ou paramètres d'Euler .....	9
1.2.5 Quaternion dual.....	11
1.2.6 Axe hélicoïdal fini.....	13
1.3 Représentation du mouvement instantané d'un corps rigide .....	18
1.4 Conclusion .....	21
CHAPITRE 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE .....	22
2.1 Introduction.....	22
2.2 Méthodes utilisées pour l'estimation de l'axe hélicoïdal fini .....	23
2.2.1 Méthodes directes .....	24
2.2.1.1 Algèbre vectorielle.....	24
2.2.1.2 Algèbre géométrique ( Beggs ) .....	25
2.2.2 Méthodes indirectes .....	28
2.2.2.1 Calcul d'une matrice de rotation suivi du calcul du vecteur de translation.....	28
2.2.2.1.1 Concept d'invariance ( Angeles 1 ).....	29
2.2.2.1.2 Algèbre linéaire ( Laub ).....	33
2.2.2.1.3 Décomposition polaire ( Veld ).....	35

2.2.2.1.4	Décomposition par valeurs singulières ( SVD ).....	41
2.2.2.1.5	Quaternion unitaire ( UQ ).....	42
2.2.2.2	Calcul simultané de la matrice de rotation et du vecteur de translation.....	44
2.2.2.2.1	Matrice homogène .....	44
2.2.2.2.2	Quaternion dual ( DQ ) .....	46
2.2.2.2.3	Approche linéaire ( RT ) .....	49
2.3	Méthodes utilisées pour l'estimation de l'axe hélicoïdal infini .....	51
2.3.1	Algèbre vectorielle .....	51
2.3.2	Concept d'Invariance ( Angeles 2 ) .....	52
2.3.3	Algèbre linéaire ( Shiflett ) .....	53
2.3.4	Minimisation au sens des moindres carré ( Sommer ).....	54
2.3.5	Décomposition par valeurs singulières .....	55
2.4	Études comparatives concernant l'AHF .....	56
2.5	Études comparatives pour l'AHI.....	61
2.6	Conclusion .....	63
CHAPITRE 3 METHODOLOGIE .....		64
3.1	Introduction.....	64
3.2	Choix des méthodes comparées .....	64
3.3	Précision et sensibilité de l'axe hélicoïdal par la méthode de Simulation .....	65
3.3.1	Profil de la vitesse angulaire .....	66
3.3.2	Génération des trajectoires des marqueurs.....	67
3.3.3	Ajout d'un bruit de mesure .....	68
3.4	Validation expérimentale .....	69
3.4.1	Dispositif mécanique.....	69
3.4.2	Système d'acquisition du mouvement .....	70
3.4.2.1	Système Vicon .....	71
3.4.2.2	Système Physilog .....	72
3.5	Filtrage .....	74
3.6	Paramètres comparés.....	79
3.7	Modélisation des erreurs d'estimation de l'axe hélicoïdal .....	81
3.8	Distribution des marqueurs .....	83
3.9	Approximation de l'AHI à partir de l'AHF .....	86
CHAPITRE 4 RÉSULTATS .....		88
4.1	Introduction.....	88
4.2	Résultats de la simulation sans bruit.....	88
4.2.1	Résultats obtenus pour l'AHF sans bruit .....	89
4.2.2	Résultats obtenus pour l'AHI sans bruit .....	90
4.3	Résultats de la simulation avec bruit.....	90
4.3.1	Résultats obtenus pour l'AHF avec bruit.....	90
4.3.2	Résultats obtenus pour l'AHI avec bruit.....	97

4.4	Résultats expérimentaux .....	101
4.4.1	Résultats expérimentaux obtenus pour l’AHF .....	102
4.4.2	Résultats expérimentaux obtenus pour l’AHI .....	106
4.5	Approximation de l’AHI par l’AHF .....	110
4.5.1	Résultats de la simulation .....	111
4.5.2	Résultats expérimentaux .....	112
4.6	Discussion .....	114
4.7	Conclusion .....	117
CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS.....		118
ANNEXE .....		120
BIBLIOGRAPHIE.....		141



## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Tableau récapitulatif des différentes méthodes présentées, pour l'estimation de l'AHF ..... 50
Tableau II	Indices donnant la distribution des marqueurs dans le cas de la simulation..... 85
Tableau III	Indices donnant la distribution des marqueurs dans le cas expérimental..... 86
Tableau IV	Erreurs sur l'estimation des paramètres de l'AHF en mm et en degrés avec un bruit de 1 mm et pour une amplitude de rotation entre 10 et 20 degrés, avant (nF) et après (F) filtrage..... 94
Tableau V	Erreur quadratique moyenne (RMS) en rad/s, sur la norme de la vitesse angulaire estimée par les quatre méthodes en fonction du nombre de marqueur (m) ..... 110

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1	Coordonnées d'un point dans deux repères ..... 5
Figure 2	Déplacement d'un corps rigide ..... 6
Figure 3	Angle de Cardan : séquence de rotation XYZ ..... 8
Figure 4	Rotation d'un point autour d'un axe passant par l'origine du repère global ..... 14
Figure 5	Déplacement hélicoïdal..... 16
Figure 6	Profils de la vitesse angulaire en rad/s et de l'angle de rotation en degrés pour deux différentes valeurs de $m$ ..... 67
Figure 7	Dispositif mécanique utilisé pour valider les différentes méthodes ..... 70
Figure 8	Support du Gyroscope donnant son orientation par rapport au repère global (Vicon) ..... 73
Figure 9	Élimination du décalage de phase du filtre de Butterworth..... 76
Figure 10	Détermination de la fréquence de coupure par la méthode d'autocorrélation (exemple)..... 78
Figure 11	Organigramme de la méthode de filtrage ..... 79
Figure 12	Erreur en position et en orientation de l'axe estimé ..... 80
Figure 13	Évolution des moyennes des erreurs d'estimation de l'AHF par la méthode DQ en fonction du niveau de bruit affectant les trajectoires de trois points ..... 91
Figure 14	Moyenne de l'erreur sur la position de l'AHF pour les huit méthodes pour un bruit de 1mm ..... 92
Figure 15	Moyenne de l'erreur sur l'orientation de l'AHF pour les huit méthodes pour un bruit de 1mm ..... 92

Figure 16	Moyenne de l'erreur sur la translation le long de l'AHF pour les huit méthodes pour un bruit de 1mm .....	93
Figure 17	Moyenne de l'erreur sur la rotation autour de l'AHF pour les huit méthodes pour un bruit de 1mm .....	93
Figure 18	Erreurs sur la position et l'orientation de l'AHF pour une amplitude de rotation de 1 à 2 deg et pour un bruit de 0,1 mm .....	95
Figure 19	Erreurs sur la translation le long de l'AHF et sur la rotation autour de l'AHF pour une amplitude de rotation de 1 à 2 deg et pour un bruit de 0,1 mm .....	96
Figure 20	Évolution des moyennes des erreurs d'estimation de l'AHI en fonction du niveau du bruit pour la méthode de Woltring .....	97
Figure 21	Erreurs d'estimation des paramètres de l'AHI pour un bruit de 1 mm après filtrage des trajectoires de trois marqueurs .....	98
Figure 22	Erreurs d'estimation de l'AHI par la méthode de Woltring, pour différents profils de vitesses angulaires .....	99
Figure 23	Erreurs moyennes d'estimation de la position et de l'orientation de l'AHI par la méthode de Woltring pour différent nombre de marqueurs (NM) pour un bruit de 0,1 mm et après filtrage des trajectoires .....	100
Figure 24	Erreurs moyennes d'estimation de la vitesse angulaire et de la vitesse linéaire autour et le long de l'AHI par la méthode de Woltring pour différent nombre de marqueurs (NM) pour un bruit de 0,1 mm et après filtrage des trajectoires .....	101
Figure 25	Paramètres estimés de l'AHF par la méthode SVD à partir d'un fichier d'acquisition, correspondant à une vitesse angulaire maximale de 1,2 rad/s .....	102
Figure 26	Effet du filtrage des trajectoires sur la qualité des résultats obtenus par la méthode SVD pour 3 marqueurs .....	103
Figure 27	Erreurs sur la position et l'orientation de l'AHF estimés par les huit méthodes pour 3 marqueurs après filtrage des trajectoires .....	104

Figure 28	Erreurs sur la quantité de translation le long et la rotation autour de l'AHF estimées par les huit méthodes pour 3 marqueurs après filtrage des trajectoires.....	105
Figure 29	Effet du nombre de marqueurs sur la qualité des résultats obtenus par la méthode SVD après filtrage des trajectoires.....	106
Figure 30	Paramètres calculés par la méthode Woltring à partir d'un fichier d'acquisition correspondant à une vitesse angulaire maximale de 1,4 rad/s.....	107
Figure 31	Effet du filtrage des trajectoires sur la qualité des résultats obtenus par la méthode de Woltring pour 3 marqueurs.....	108
Figure 32	Comparaison des quatre méthodes pour les trajectoires filtrées de quatre marqueurs. Les paramètres sont tracés en fonction de la vitesse angulaire normalisée .....	109
Figure 33	Erreur sur la position et sur l'orientation de l'AHF et de l'AHI dans le cas de la simulation.....	111
Figure 34	Erreur sur la vitesse angulaire et sur la vitesse de translation autour et le long de l'AHF et de l'AHI dans le cas de la simulation.....	112
Figure 35	Erreur sur la position et sur l'orientation de l'AHF et de l'AHI dans le cas expérimental .....	113
Figure 36	Erreur sur la vitesse angulaire et sur la vitesse de translation autour et le long de l'AHF et de l'AHI dans le cas expérimental.....	113

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

AHF	Axe hélicoïdal fini
AHI	Axe hélicoïdal instantané
$C$	Matrice de corrélation des points
$d$	Vecteur de translation
$\det(A)$	Déterminant de la matrice $A$
$I$	Matrice identité
$sk$	Opérateur antisymétrique
$R$	Matrice de rotation
$R^T$	Matrice de rotation transposée
$tr(A)$	Trace de la matrice $A$
$vect(A)$	Opérateur $vect$ de la matrice $A$ de dimension 3x3
$e$	Vecteur orientation de l'axe
$\theta$	Angle de rotation autour de l'AHF
$u$	Quantité de translation le long de l'AHF
$p_0$	Position de l'axe
$\sigma$	Écart type
$p_i$	Point $i$
$P_i$	Vecteur position du point $p_i$
$\bar{p}$	Vecteur position du centroïde des marqueurs
$p'_i$	Vecteur position relative du point $p_i$ par rapport au centroïde $\bar{p}$
$v$	Vitesse de translation le long de l'AHI
$\bar{v}$	Vitesse linéaire du centroïde
$\omega$	Vecteur vitesse angulaire autour de l'AHI
$\times$	Produit vectoriel
$\cdot$	Produit scalaire

## INTRODUCTION

La modélisation du mouvement du corps rigide par la théorie de l'axe hélicoïdal (une combinaison d'une quantité de rotation autour et d'une quantité de translation le long d'un certain axe, d'où l'appellation d'axe hélicoïdal) est utilisée dans différents domaines tel que la vision par ordinateur et la robotique. L'application de cette théorie dans le domaine de la biomécanique (mécanique appliquée à l'étude des systèmes biologiques) prend de plus en plus de place. On peut considérer le mouvement d'un segment articulaire comme une série de déplacements finis. Dans ce cas le mouvement est caractérisé par un angle de rotation autour et une quantité de translation le long d'un axe défini dans l'espace par sa position et son orientation. Cet axe est dénommé axe hélicoïdal fini (AHF), à cause de la discrétisation du mouvement en une série de déplacements. Par contre en prenant la continuité du mouvement en considération, ce mouvement sera caractérisé par une vitesse de rotation (vitesse angulaire) autour et une vitesse de translation le long d'un axe défini par sa position et son orientation instantanées dans l'espace. On parle dans ce cas-ci d'un axe hélicoïdal instantané (AHI).

L'application de la théorie hélicoïdale avec ses deux versions (AHF et AHI) pour décrire et comprendre les mouvements articulaires, pour étudier les différentes techniques de positionnement des prothèses ou comparer les performances de celles-ci, pour évaluer la pertinence d'une chirurgie (en comparant les aspects biomécaniques pré et postopératoires) et pour des fins de classification de population selon les pathologies (diagnostic), n'a pas besoin d'être argumentée. En effet plusieurs auteurs ont déjà utilisé cette technique pour différentes articulations, tel que celle de la mâchoire (maxillaire inférieur) [1, 2], de la colonne cervicale [3-5], de l'épaule [6], du coude [7-9], du poignet et de la main [10, 11], de la hanche [12], du genou [13-16] ainsi que de la cheville [17].

Il existe plusieurs méthodes pour estimer l'axe hélicoïdal à partir d'un ensemble de points représentant un corps rigide. Cependant une question se pose : toutes ces méthodes sont elles équivalentes et précises pour l'estimation des axes articulaires ?

Avant de répondre à cette question, une revue de la littérature a été effectuée et n'a fournie qu'une réponse partielle. Soit que les méthodes comparées n'étaient pas très représentatives de ce qu'il y a dans la littérature, soit il y avait quelques lacunes dans la méthodologie de la comparaison ou de la validation.

Le but de ce travail est de répondre à la question citée plus haut en comparant huit algorithmes d'estimation de l'AHF et quatre algorithmes d'estimation de l'AHI. La comparaison est effectuée sur deux plans. Le premier représente une simulation, où un mouvement similaire au mouvement d'un segment articulaire sera généré, et la comparaison des différentes méthodes sera faite dans un contexte de données idéales (sans bruit), et dans un contexte de données corrompues avec un bruit gaussien de moyenne nulle et avec une variance variable. Afin d'obtenir de bonnes réalisations de bruit, on a effectué une simulation Monté Carlo de mille itérations sur chaque échantillon. Le deuxième plan, sera représenté par une manipulation expérimentale avec un dispositif mécanique. Un bras mécanique doté d'une articulation charnière sera placé dans le champ de vision d'un système optoélectronique pour l'acquisition de sa trajectoire. Un gyroscope triaxial sera fixé sur ce bras pour l'acquisition de sa vitesse angulaire. Les effets du filtrage des trajectoires ainsi que le nombre de points pris en compte pour l'estimation de l'axe hélicoïdal seront étudiés.

Le présent mémoire est divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre, introduit des notions générales sur le mouvement du corps rigide et de l'axe hélicoïdal. Le second chapitre présente une revue de la littérature portant sur l'estimation de l'axe hélicoïdal à partir d'un ensemble de points représentant la position tridimensionnelle (3D) d'un corps rigide. Le chapitre trois présente la méthodologie adoptée pour l'étude comparative qui a

été effectuée dans le cadre de ce projet. Dans le quatrième chapitre on présentera les résultats obtenus avec une discussion. Finalement, on présente une conclusion générale suivie des principales recommandations.



## **CHAPITRE 1**

### **NOTIONS SUR LE CORPS RIGIDE**

#### **1.1 Introduction**

Un corps rigide est une modélisation d'un corps qui a un volume et une masse et dont la forme ne peut pas changer. C'est un corps solide et non élastique. Plusieurs méthodes existent [18, 19] pour représenter le mouvement du corps rigide dans l'espace. Dans les sections suivantes, on présente les principales méthodes qui sont utilisées pour représenter des déplacements finis (déplacement d'une position à une autre sans prise en considération de vitesse ou de temps) et les déplacements infinitésimaux d'un corps rigide dans l'espace.

#### **1.2 Représentation d'un déplacement fini d'un corps rigide**

Pour représenter le déplacement d'un corps rigide dans l'espace, il convient de choisir un système de coordonnées lié à un repère inertiel (fixe), et un autre système de coordonnées lié à un repère mobile ou local (attaché au corps rigide). La description du déplacement du corps rigide est exprimée par la relation entre ces deux systèmes de coordonnées.

Le déplacement général d'un corps rigide peut être décomposé en un déplacement angulaire de rotation autour et en un déplacement linéaire de translation le long d'un certain axe dans l'espace 3D. Les méthodes diffèrent dans la façon de représenter mathématiquement ces deux déplacements. Ces déplacements seront exprimés par des

matrices de rotation et des vecteurs de translation, des matrices homogènes, des quaternions unitaires, des quaternions duaux,....

### 1.2.1 Matrice de rotation

La figure 1 représente les repères  $\{A\}$  et  $\{B\}$ , leurs origines respectives  $O_A$  et  $O_B$  et un point  $P$  dont les coordonnées sont connues dans le repère  $\{B\}$ .

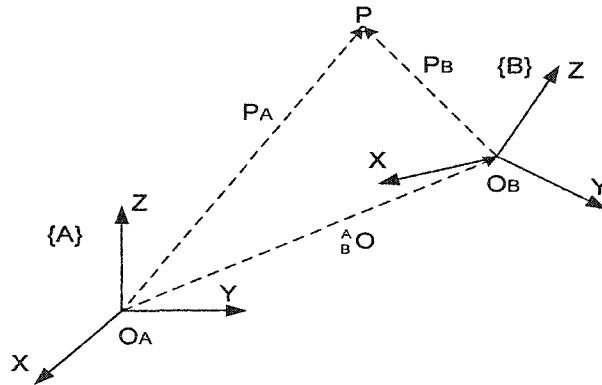


Figure 1 Coordonnées d'un point dans deux repères

La position du point  $P$  dans le repère  $\{A\}$  est donnée par la relation vectorielle  $O_A P = O_B P + O_A O_B$  qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P_A = {}^A R_B P_B + {}^A O_B \quad (1.1)$$

Où  $P_A$  et  $P_B$  sont les vecteurs position du point  $P$  dans les repères  $\{A\}$  et  $\{B\}$  respectivement. La matrice  ${}^A R_B$  est une matrice 3x3 dont les colonnes représentent les coordonnées des vecteurs unitaires du repère  $\{B\}$  exprimés dans le repère  $\{A\}$ , c'est la

matrice donnant l'orientation du repère  $\{B\}$  par rapport au repère  $\{A\}$ . Le vecteur  ${}^A_B O$  représente les coordonnées de l'origine de  $\{B\}$  exprimées dans  $\{A\}$ .

De la même manière et en supposant que le repère  $\{B\}$  soit solidaire à un corps rigide en déplacement, on peut trouver la relation entre les positions et orientations de ce corps dans les deux positions  $i$  et  $i+1$ : (voir la figure 2)

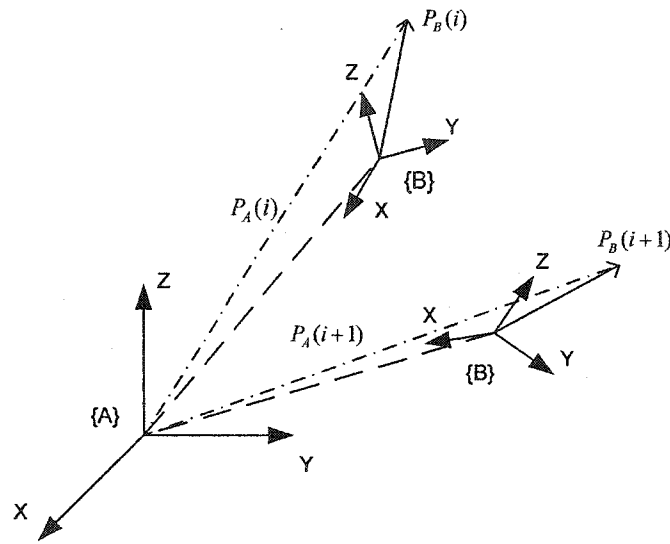


Figure 2 Déplacement d'un corps rigide

On a d'après l'équation (1.1) les relations suivantes :

$$P_A(i) = {}^A_B R(i) P_B(i) + {}^A_B O(i) \quad (1.2)$$

$$P_A(i+1) = {}^A_B R(i+1) P_B(i+1) + {}^A_B O(i+1)$$

Le corps étant rigide les positions du point  $P$  sont invariantes dans le repère  $\{B\}$  par définition. On obtient après manipulation des équations (1.2) la relation suivante :

$$P_A(i+1) = {}^A R' P_A(i) + {}^A O' \quad (1.3)$$

$$\text{Avec : } {}^A R' = {}^A R(i+1) {}^A R^T(i) \text{ et } {}^A O' = {}^A O(i+1) - {}^A R(i+1) {}^A R^T(i) {}^A O(i)$$

Une matrice de rotation  $R$  ( ${}^A R$ ,  ${}^B R'$ ) doit être orthogonale propre, soit  $R R^T = R^T R = I$  et  $\det(R) = 1$ . Ceci découle du fait que la fonction rotation d'un vecteur conserve (laisse invariante) la norme de ce dernier.

### 1.2.2 Matrice de transformation homogène

Il est possible d'avoir une relation plus compacte que celle de l'équation (1.1) en introduisant les coordonnées homogènes du point  $P$ . Le vecteur colonne 4x1 représente la coordonnée homogène de  $P$  : il est composé de ses trois coordonnées spatiales (x,y,z) et d'un quatrième élément égal à un. En introduisant la matrice de transformation homogène 4x4 définie par :

$$T = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

La relation (1.1) devient dans ce cas :

$$P_A = T P_B \quad (1.5)$$

### 1.2.3 Angle d'Euler/Cardan

Dans cette section on donne l'expression des termes de la matrice d'orientation  ${}^A R$  dans le cas de repérage angulaire du repère  $\{B\}$  par rapport au repère  $\{A\}$  par angles d'Euler

et de Cardan. En supposant que  $\{B\}$  soit un solide auquel on fait subir trois rotations successives autour des axes  $X, Y, Z$  de  $\{A\}$ , pour l'amener sur  $\{A\}$  avec respectivement des angles de rotations  $\psi, \theta$  et  $\varphi$ . Les angles d'Euler impliquent une répétition de rotation autour d'un axe particulier, dans ce cas on a les six possibilités suivantes pour les séquences de rotation :  $XYX, XZX, YXY, YZY, ZXZ, ZYZ$ . Les angles de Cardan sont caractérisés par des rotations autour des trois axes sans répétition :  $XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX$ . Même si les angles de Cardan sont différents des angles d'Euler (plusieurs auteurs ne distinguent pas entre les douze séquences et les dénomment par angles d'Euler), les deux types de représentation utilisent la même approche pour déterminer la matrice d'orientation  ${}^A_B R$  qui dépend de la séquence choisie. Pour illustrer le concept on a choisi une séquence de rotations  $XYZ$ . Cette séquence consiste à décrire l'orientation du repère  $\{B\}$  en le confondant avec le repère  $\{A\}$ , en tournant  $\{B\}$  d'un angle  $\psi$  autour de son axe  $X$  ( $X'_B$ ), en le tournant d'un angle  $\theta$  autour de son axe  $Y$  ( $Y''_B$ ) et finalement en le tournant d'un angle  $\varphi$  autour de son axe  $Z$  ( $Z'''_B$ ), (voir figure 3).

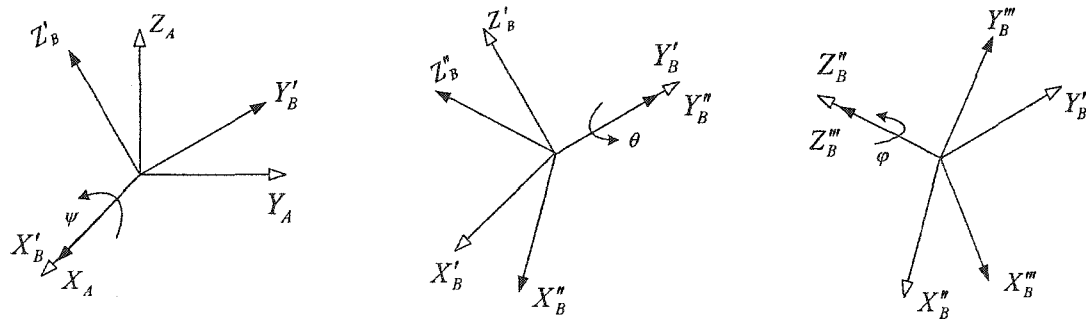


Figure 3 Angle de Cardan : séquence de rotation XYZ

Si un corps rigide est décrit par un ensemble de points, celui-ci subit une rotation lorsque chaque point subit la même transformation. Les coordonnées  $p' = [x' \ y' \ z']^T$ , après

rotation du vecteur  $p = [x \ y \ z]^T$  par un angle  $\psi$  autour de l'axe X, d'un angle  $\theta$  autour de l'axe Y et d'un angle  $\varphi$  autour de l'axe Z, sont données par [19] :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

La matrice de rotation est le produit des trois matrices de rotation, suivant l'ordre inversé des rotations préétablies, soit :

$$R = R_Z(\varphi) R_Y(\theta) R_X(\psi) \quad (1.7)$$

L'avantage de cette représentation est que les rotations peuvent être choisies selon des axes physiques, donc les angles sont faciles à interpréter (c'est la raison pour laquelle cette représentation est populaire en biomécanique, car pour les cliniciens, il est plus facile d'interpréter des angles de rotations autour d'axes définis suivant des repères anatomiques : flexion/extension,...). Son inconvénient est le cas de singularité qu'elle présente pour un angle  $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ . En effet, connaissant la matrice de rotation, les deux angles  $\psi$  et  $\varphi$  ne peuvent pas être déterminées de façon unique, c'est seulement leur différence ou leur somme qui peuvent l'être. Ce problème est connu sous le nom de blocage ou « gimbal locks ». L'autre inconvénient, est que la représentation n'est pas unique. En effet les valeurs des angles dépendent de la séquence de rotation choisie.

#### 1.2.4 Quaternion ou paramètres d'Euler

Un quaternion est un nombre hypercomplexe avec une partie réelle et trois parties imaginaires. En général, la partie réelle est appelée partie scalaire du quaternion et sa

partie imaginaire est dénommée partie vectorielle. Tout point dans l'espace peut être considéré comme un quaternion purement imaginaire (partie réelle nulle). La rotation d'un vecteur  $p$  par un quaternion unitaire  $q$  ( $\|q\|=1$ ) est donnée par :

$$p' = q p \bar{q} \quad (1.8)$$

Avec  $\bar{q}$  le quaternion conjugué de  $q$ . Ce dernier est défini par :

$$q = (q_s, q_v) = \left( \cos \frac{\theta}{2}, e \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.9)$$

Avec  $q_s$  et  $q_v$  les parties scalaire et vectorielle respectivement du quaternion  $q$ , et  $e$  le vecteur unitaire autour duquel le vecteur  $p$  a subi une rotation d'un angle  $\theta$ .

Il faut noter que le lien entre le quaternion et la matrice de rotation est de nature biunivoque. En effet, les deux quaternions  $q$  et  $-q$  représentent la même quantité de rotation. Pour éviter cette ambiguïté, il suffit d'établir la contrainte  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . De cette manière le quaternion solution sera distingué par sa partie réelle positive.

L'avantage de la représentation de la rotation par un quaternion unitaire est d'être compacte et de ne présenter aucune singularité. Une fois le quaternion connu on peut calculer la matrice de rotation par la relation suivante :

$$R = (q_s^2 - q_v^T q_v)I + 2q_v q_v^T + 2q_s sk(q_v) \quad (1.10)$$

L'opérateur  $sk$  permet de construire une matrice 3x3 antisymétrique à partir des trois éléments d'un vecteur. Si  $a$  représente un vecteur tel que  $a = [a_x, a_y, a_z]$ , alors on a :

$$sk(a) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

### 1.2.5 Quaternion dual

Les quaternions sont limités dans le sens où seule la quantité de rotation est formalisée, la translation est exprimée séparément. La représentation du déplacement d'un corps rigide dans l'espace par un quaternion dual est étroitement liée à la théorie de l'axe hélicoïdale. D'après le théorème de Chasles, tout mouvement d'un corps rigide peut être vu comme une translation le long d'un axe et une rotation autour de celui-ci (la séquence translation/rotation est commutative).

Les paramètres requis pour identifier ce déplacement sont l'axe hélicoïdal, l'angle de rotation autour de l'axe et la quantité de translation le long de cet axe. L'axe hélicoïdal est défini par une ligne dans l'espace qui passe par un point  $p_0$  et dont l'orientation est donnée par un vecteur unitaire  $e$ . Un quaternion dual  $\hat{q}$  est composé de deux parties :  $\hat{q} = r + \varepsilon s$ , où  $r$  et  $s$  sont des quaternions dénommés partie réelle et partie duale respectivement.  $\varepsilon$  est l'opérateur dual défini par  $\varepsilon^2 = 0$ .

L'interprétation est similaire à celle vue pour le quaternion,

$$\hat{q} = \left( \cos \frac{\hat{\theta}}{2}, \hat{e} \sin \frac{\hat{\theta}}{2} \right)^T \quad (1.12)$$



Où  $\hat{e}$  (le vecteur dual) et  $\hat{\theta}$  (l'angle dual) représentent respectivement, l'axe hélicoïdal défini par sa position ( $p_0$ ) et son vecteur orientation ( $e$ ), et la quantité de rotation ( $\theta$ ) autour et la quantité de translation ( $u$ ) le long de cet axe. Avec :

$$\begin{aligned}\hat{e} &= e + \varepsilon (p_0 \times e) \\ \hat{\theta} &= \theta + \varepsilon u\end{aligned}\tag{1.13}$$

En remplaçant les équations (1.13) dans l'équation (1.12) on peut déterminer les deux parties réelle et duale :

$$r = \left( \cos \frac{\theta}{2}, e \sin \frac{\theta}{2} \right)^T \tag{1.14}$$

$$s = \left( -\frac{u}{2} \sin \frac{\theta}{2}, e \frac{u}{2} \cos \frac{\theta}{2} + (p_0 \times e) \sin \frac{\theta}{2} \right)^T$$

On remarque que la partie réelle  $r$  ressemble à la formulation de la rotation par quaternion, ce qui permet d'écrire sous forme compacte la matrice de rotation  $R$  en fonction de cette partie réelle du quaternion dual. Celle-ci, ainsi que la partie translation sont données par :

$$\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = W_{\hat{q}}(r)^T Q_{\hat{q}}(r) \tag{1.15}$$

$$D = W_{\hat{q}}(r)^T s$$

Avec  $D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $d$  étant le vecteur translation définit dans (1.4) et les fonctions matricielles  $W_{\hat{q}}$  et  $Q_{\hat{q}}$  sont définies par :

$$\begin{aligned}
Q_{\hat{q}}(r) &= \begin{bmatrix} r_s I + sk(r_v) & r_v \\ -r_v^T & r_s \end{bmatrix} \\
W_{\hat{q}}(r) &= \begin{bmatrix} r_s I - sk(r_v) & r_v \\ -r_v^T & r_s \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Avec  $r_v$  et  $r_s$  les parties vectorielle et scalaire, respectivement du quaternion  $r$ .

### 1.2.6 Axe hélicoïdal fini

Tel que mentionné, le déplacement général d'un corps rigide peut être divisé en une rotation autour et en une translation le long d'un certain axe qu'on appellera axe hélicoïdal.

Si on s'intéresse à la rotation formalisée par la matrice  $R$  que subit un point  $p$ , autour d'un axe passant par l'origine du repère global  $\{A\}$ , et dont l'orientation est donnée par le vecteur unitaire  $e$ . La relation entre les deux vecteurs position du point  $p$  avant ( $p_i$ ) et après ( $p_{i+1}$ ) déplacement est donnée par :

$$p_{i+1} = R p_i \tag{1.17}$$

On définit un vecteur  $l$  normal au vecteur  $e$  (voire figure 4), dans ce cas le vecteur  $qp_i$  qui relie le point  $p_i$  et le point  $q$  représentant sa projection sur l'axe, peut s'écrire sous la forme :

$$qp_i = r l \tag{1.18}$$

$r$  étant le rayon de rotation.

Lorsque le vecteur  $rl$  subit une rotation d'un angle  $\theta$  autour de  $e$ , le point  $p$  se déplace de  $p_i$  à  $p_{i+1}$ . On définit les vecteurs positions  $F$ ,  $P_1$  et  $P_2$  des points  $q$ ,  $p_i$  et  $p_{i+1}$  respectivement. Et on définit un vecteur unitaire  $k$  perpendiculaire aux deux vecteurs  $e$  et  $l$ , tel que :

$$k = e \times l \quad (1.19)$$

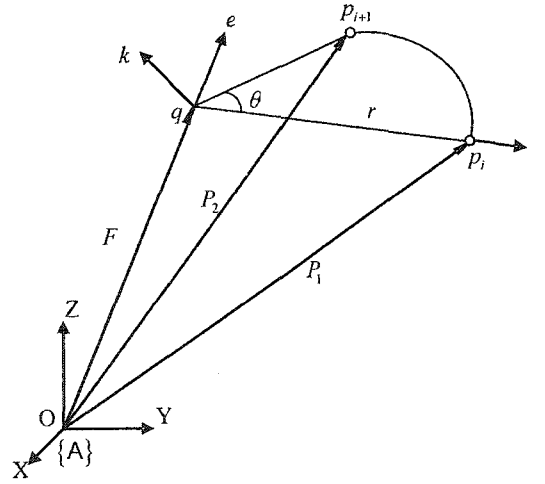


Figure 4 Rotation d'un point autour d'un axe passant par l'origine du repère global.

D'après la figure 4 on a :

$$P_2 = F + (r \cos \theta)l + (r \sin \theta)k \quad (1.20)$$

$$rl = P_1 - F$$

De (1.19) et (1.20) on a :

$$k = e \times \frac{P_1 - F}{r} \quad (1.21)$$

De (1.20) et (1.21) on a :

$$\begin{aligned} P_2 &= F + (P_1 - F) \cos \theta + r \sin \theta \frac{e \times (P_1 - F)}{r} \\ &= F(1 - \cos \theta) + P_1 \cos \theta + (e \times P_1) \sin \theta \\ &= (e \bullet P_1) e (1 - \cos \theta) + P_1 \cos \theta + (e \times P_1) \sin \theta \end{aligned} \quad (1.22)$$

$F$  étant la projection de  $P_1$  sur  $e$ ,  $F = (e \bullet P_1) e$ .

Soit sous la forme matricielle on a :

$$P_2 = [(1 - \cos \theta) e e^T + I \cos \theta + sk(e) \sin \theta] P_1 \quad (1.23)$$

Donc la relation qui relie la matrice de rotation au vecteur orientation de l'axe et à l'angle de rotation autour de celui-ci est d'après (1.17) et (1.23) :

$$R = (1 - \cos \theta) e e^T + \cos \theta I + (\sin \theta) sk(e) \quad (1.24)$$

Pour un déplacement général (rotation et translation) autour d'un axe dont la position est connue par rapport à un repère fixe, les équations restent valables. On a d'après la figure 5, le point  $p$  à la position  $i$  ( $p_i$ ) qui subit une rotation autour et une translation le long de l'axe pour aboutir à la position  $i+1$ , ( $p_{i+1}$ ) :

$$(P_2 - p_0) = R(P_1 - p_0) + u e \quad (1.25)$$

Soit :

$$P_2 = R P_1 + d \quad (1.26)$$

Avec  $d = (I - R) p_0 + u e$

Dans les sections précédentes, on a vu différentes façons d'exprimer la rotation et la translation d'un corps rigide en déplacement. La représentation hélicoïdale peut être déduite à partir de la matrice de rotation de la manière suivante :

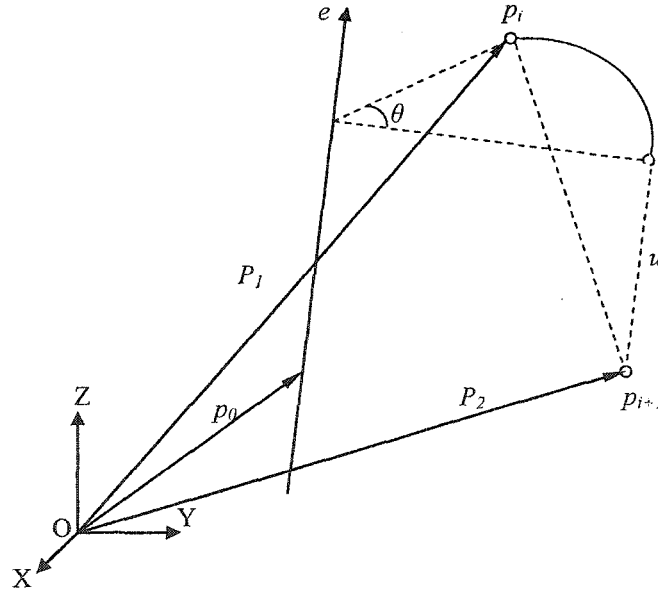


Figure 5 Déplacement hélicoïdal

De (1.24) on a :  $\text{tr}(R) = 1 + 2 \cos \theta$  et  $\text{tr}((R - R^T)^T (R - R^T)) = 4 \sin^2 \theta$

On a donc pour un angle compris entre 0 et  $\pi$ .

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \frac{\text{tr}(R) - 1}{2} \\ \sin \theta &= \frac{1}{2} \sqrt{(r_{12} - r_{21})^2 + (r_{23} - r_{32})^2 + (r_{31} - r_{13})^2}\end{aligned}\quad (1.27)$$

Avec  $r_{ij}$  les éléments de la matrice de rotation  $R$ , et  $\text{tr}$  est l'opérateur qui calcul la trace d'une matrice (la somme des éléments de la diagonale).

Selon l'équation (1.24) et parce que  $sk(e)$  est antisymétrique, pour le vecteur orientation on a :

$$2(1 - \cos \theta) e e^T = R + R^T - 2 \cos \theta I \quad (1.28)$$

Chaque colonne de la quantité matricielle (3x3),  $R + R^T - 2 \cos \theta I$  représente le vecteur  $e$  pondéré par un scalaire, on a :

$$e = \frac{h_{\max}}{\|h_{\max}\|} \quad (1.29)$$

Avec  $[h_1 \ h_2 \ h_3] = R^T + R - 2 \cos(\theta) I$  et  $h_{\max}$  correspond au vecteur colonne qui a la norme la plus élevée des  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

À partir des équations (1.25) et (1.26) on peut trouver la quantité de translation le long de l'axe par la projection du vecteur de translation sur celui-ci :

$$u = e^T d \quad (1.30)$$

La position de l'axe peut être calculée en projetant le point milieu du segment reliant les deux points  $p_i$  et  $p_{i+1}$  sur l'axe [20] :

$$p_0 = p + \left\{ 2 \tan\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right\}^{-1} (e \times d') \quad (1.31)$$

Avec  $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$  et  $d' = p_2 - p_1$ .

### 1.3 Représentation du mouvement instantané d'un corps rigide

Le mouvement d'un corps rigide peut être vu comme une série de déplacements infinitésimaux. Ce mouvement peut être décomposé en un mouvement de rotation autour et un mouvement de translation le long d'un certain axe. Dans ce cas il faut connaître la position et l'orientation de l'axe, la vitesse de rotation ( $\omega$ ) autour de l'axe et la vitesse de translation le long ( $\dot{u}$ ) de cet axe.

Si on considère deux points ( $a$  et  $b$ ) d'un même corps rigide en mouvement, le vecteur position relative étant invariant, on a :

$$a(t) - b(t) = R(t)(a_0 - b_0) \quad (1.32)$$

Avec  $a(t)$  et  $b(t)$  : les vecteurs position instantanée des point  $a$  et  $b$  respectivement,

$a_0$  et  $b_0$  : sont les positions initiales de ces mêmes points,

$R(t)$  : est la matrice de rotation instantanée.

En dérivant l'équation (1.32) et en remplaçant  $(a_0 - b_0)$  par  $R^T(t)(a(t) - b(t))$  on obtient :

$$\dot{a}(t) = \dot{b}(t) + \dot{R}(t) R^T(t)(a(t) - b(t)) \quad (1.33)$$

Le terme  $\dot{R}R^T$  est connu sous le nom de matrice vitesse angulaire  $W$  qui est antisymétrique, avec  $\omega = \text{vect}(W)$ . L'opérateur  $\text{vect}$  est défini pour une matrice 3x3,  $W$ , tel que :

$$\text{vect}(W) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} W_{3,2} - W_{2,3} \\ W_{1,3} - W_{3,1} \\ W_{2,1} - W_{1,2} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

Avec  $W_{i,j}$  l'élément  $(i, j)$  de  $W$  qui est égale à  $sk(\omega)$  d'après l'équation (1.11).

Donc, la connaissance de la matrice de rotation instantanée  $R(t)$  permet l'estimation du vecteur vitesse angulaire  $\omega(t)$ .

Le vecteur vitesse linéaire du point  $a$  peut être décomposé en un vecteur parallèle à l'axe de rotation (vitesse due à la translation) et un vecteur perpendiculaire à cet axe (vitesse due à la rotation). À partir de l'équation (1.33) on peut démontrer que [21] :

$$\dot{a} = \frac{\omega \omega^T}{\|\omega\|^2} \dot{b} - \frac{1}{\|\omega\|^2} W^2 \dot{b} + W(a - b) \quad (1.35)$$

(Toutes les quantités sont en fonction du temps, on peut les écrire sans l'argument  $(t)$  pour alléger l'écriture).

Le premier terme dans l'équation (1.35) ne dépend pas de la position du point  $a$  et est parallèle à  $\omega$ , la somme du deuxième et troisième termes dépend linéairement de la position du point  $a$  et est normale à  $\omega$ .

Dans la représentation hélicoïdale, l'orientation de l'axe est déterminée à partir du vecteur vitesse angulaire par :

$$e = \frac{\omega}{\|\omega\|} \quad (1.36)$$



La vitesse de translation le long de l'axe peut être calculée en projetant la vitesse d'un point  $a$  sur l'axe.

$$\dot{u} = e^T \dot{a} \quad (1.37)$$

La position de l'axe peut être calculée à partir de l'équation (1.35). En effet un point  $p_0$  situé sur l'axe hélicoïdal aurait une composante nulle pour la vitesse normale à l'axe [21] :

$$-\frac{1}{\|\omega\|^2} W^2 \dot{b} + W(p_0 - b) = 0 \quad (1.38)$$

Une solution à l'équation (1.38) serait représentée par le point suivant [21] :

$$p_0 = b + \frac{1}{\|\omega\|^2} W \dot{b} \quad (1.39)$$

La relation entre les dérivées des angles d'Euler ( $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$ ) qui représentent les vitesses de rotation autour des axes  $X'_B$ ,  $Y''_B$  et  $Z'''_B$  respectivement (voir la section 1.2.3) et le vecteur vitesse angulaire exprimé dans le repère {B} peut être établie en sommant les trois composantes de ce vecteurs. La première composante, issue de la première rotation est donnée par :

$$\omega_\psi = R_Z(\phi) R_Y(\theta) [\dot{\psi} \ 0 \ 0]^T \quad (1.40)$$

La deuxième rotation a lieu autour de  $Y''_B$ , la vitesse de rotation est donnée par :

$$\omega_\theta = R_Z(\phi) [0 \ \dot{\theta} \ 0]^T \quad (1.41)$$

La dernière rotation est autour de  $Z_B'''$ , et la vitesse de rotation est donnée par :

$$\omega_\varphi = [0 \quad 0 \quad \dot{\varphi}] \quad (1.42)$$

Les trois composantes ((1.40), (1.41) et (1.42)) du vecteur vitesse angulaire sont exprimées dans un même repère orthonormé. Le vecteur vitesse angulaire est donné par la somme de ces trois composantes :

$$\omega_{\{B\}} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Dans le cas où la représentation de la rotation est donnée par le quaternion unitaire, la relation entre la vitesse angulaire et le quaternion unitaire est donnée par [18] :

$$\omega = 2 \bar{q} \dot{q} \quad (1.44)$$

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a vu différentes manières de décrire le déplacement d'un corps rigide dans l'espace. Les méthodes utilisant l'axe hélicoïdal, les quaternions unitaires et les quaternions duaux, sont basées sur le même concept (rotation autour d'un axe dans l'espace). En effet l'orientation de l'axe correspond à la partie vectorielle normalisée du quaternion et l'angle de rotation autour de l'axe correspond à deux fois son angle. La représentation par matrice de rotation est élégante et ne présente pas de singularité contrairement aux angles d'Euler, cependant bien que composée de neuf éléments, trois d'entre eux seulement sont indépendants (les vecteurs colonnes sont unitaires et mutuellement perpendiculaires).

## CHAPITRE 2

### REVUE DE LA LITTÉRATURE

#### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons les différentes méthodes utilisées pour l'estimation des paramètres de l'axe hélicoïdal décrivant le mouvement d'un corps rigide dans l'espace. Le mouvement d'un corps rigide est en général continu dans le temps, et sa description par la théorie de l'axe hélicoïdal peut faire abstraction de l'aspect temporel du mouvement, comme elle peut en tenir compte. Dans le premier cas on parle d'axe hélicoïdal fini (AHF). On considère deux positions distinctes du corps en mouvement et on détermine la quantité de rotation ( $\theta$ ) autour de l'axe et la quantité de translation ( $u$ ) le long de celui-ci.

Dans le deuxième cas, on parle d'axe hélicoïdal instantané (AHI). On détermine le vecteur vitesse de rotation ( $\omega$ ) autour de l'axe et la vitesse de translation ( $\dot{u}$ ) le long de celui-ci. Dans les deux cas, l'axe est défini par un vecteur qui possède une orientation et une position dans l'espace.

Pour chacun des deux concepts, soit de l'axe hélicoïdal fini (AHF) et de l'axe hélicoïdal infini (AHI) une synthèse des méthodes sera présentée ainsi que différentes études comparatives publiées dans la littérature ; et ce dans différents domaines, tel que la biomécanique pour l'estimation des axes articulaires, la vision et la robotique pour déterminer la position et l'orientation des objets dans l'espace, ou encore en graphisme pour l'animation.

## 2.2 Méthodes utilisées pour l'estimation de l'axe hélicoïdal fini

La cinématique directe consiste à trouver la position et l'orientation d'un objet dans l'espace, connaissant d'une part sa position initiale et les caractéristiques du mouvement de ce corps, qui peuvent être représentés sous différentes formes tel que décrit dans le premier chapitre (matrice de rotation et vecteur de translation, matrice homogène, quaternion, ...).

Le problème de la cinématique inverse quant à lui, consiste à trouver les caractéristiques du mouvement à partir de deux positions distinctes du corps rigide. Ces deux positions sont représentées par au moins trois points non colinéaires de ce corps. Ce problème peut être présenté comme suit :

Ayant les coordonnées d'au moins trois points  $p_{(1)i} \{ i = 1, 2, \dots, m \}$  non colinéaires d'un corps rigide dans la première position, et connaissant les coordonnées de ces mêmes points dans la deuxième position  $p_{(2)i} \{ i = 1, 2, \dots, m \}$ , peut-on déterminer les paramètres caractérisant le mouvement (matrice de rotation, vecteur de translation, quaternion, ...) ?

Les méthodes utilisées dans différents domaines pour résoudre le problème de la cinématique inverse peuvent être classées de différentes manières. Elles se distinguent les unes des autres par les éléments suivants :

- Prise en compte ou non du bruit affectant les points;
- Les outils mathématiques utilisés pour résoudre le problème : inversion de matrice, décomposition polaire, décomposition par valeurs singulières,...
- Calcul direct ou indirect à partir des coordonnées des points.

La classification qu'on a choisie est basée sur le passage ou non par des étapes intermédiaires, pour enfin extraire les paramètres de l'AHF. Ce passage intermédiaire

peut lui aussi être divisé en différentes sous-classes. Ces sous-classes sont celles qui estiment une matrice de rotation ou un quaternion unitaire puis un vecteur de translation, celles qui calcul simultanément une matrice de rotation et un vecteur de translation, une matrice homogène ou un quaternion dual et celles qui calculent un vecteur de translation avant de calculer la matrice de rotation.

### 2.2.1 Méthodes directes

Les méthodes directes permettent de calculer les paramètres de l'axe hélicoïdal directement à partir des coordonnées des points. On peut citer les deux méthodes basées sur l'algèbre vectorielle et géométrique à titre d'exemples.

#### 2.2.1.1 Algèbre vectorielle

C'est une méthode qui est basée sur l'algèbre vectorielle, et qui permet d'obtenir les paramètres hélicoïdaux directement à partir des coordonnées des points. Bisshopp [22], Bottema et Roth [23] ont développé des méthodes mettant en relation les coordonnées de trois points avant et après déplacement du corps rigide, l'angle de rotation ( $\theta$ ) autour de l'AHF et l'orientation ( $e$ ) de celui-ci dans l'espace, tel qu'illustré par l'équation (2.1).

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)e = \frac{[(p_{(2)3} - p_{(2)1}) - (p_{(1)3} - p_{(1)1})] \times [(p_{(2)2} - p_{(2)1}) - (p_{(1)2} - p_{(1)1})]}{[(p_{(2)3} - p_{(2)1}) + (p_{(1)3} - p_{(1)1})] \cdot [(p_{(2)2} - p_{(2)1}) - (p_{(1)2} - p_{(1)1})]} = K \quad (2.1)$$

Avec  $p_{(i)j}$  : le vecteur position du point  $j$  dans la position  $i$ .

D'après l'équation (2.1), on a :

$$e = \frac{K}{\|K\|} \quad (2.2)$$

$$\theta = 2 \operatorname{tg}^{-1}(\|K\|)$$

Ces méthodes estiment les paramètres hélicoïdaux sans passer par le calcul de la matrice de rotation. Suivant l'ordre des points choisis, différentes solutions peuvent être trouvées. Ce qui dans le cas de données bruitées pose le problème du choix de la bonne solution.

La position de l'axe est donnée par :

$$p_0 = \frac{1}{2} [p_{(2)l} + p_{(1)l} + e \times (p_{(2)l} - p_{(1)l}) \operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}\right) - (e \bullet (p_{(2)l} + p_{(1)l}))e] \quad (2.3)$$

La quantité de translation est donnée par :

$$u = e \bullet (p_{(2)l} - p_{(1)l}) \quad (2.4)$$

Pour la localisation de l'axe, Bisshopp [22] suppose que celui-ci passe par l'origine du repère global.

#### 2.2.1.2 Algèbre géométrique ( Beggs )

Beggs [24] avait développé une méthode basée sur la manipulation de vecteurs formés de points dans une première position et leurs équivalents dans une deuxième position (après déplacement), afin de déterminer une matrice de rotation. Cette méthode ne prend en compte que trois points  $\{m = 3\}$  du corps rigide et suppose que les distances entre les points d'un même solide sont invariantes d'une position à l'autre (ce qui théoriquement

vrais). De plus elle génère huit solutions pour la matrice de rotation. Le choix de la bonne solution consiste à trouver celle qui répond à la condition d'orthogonalité propre de la matrice de rotation ( $RR^T = I$  et  $\det(R)=1$ ).

Une autre version de la méthode de Beggs [25] estime la matrice hélicoïdale (homogène)  $H$  à partir de trois points du corps rigide, en effectuant des manipulations géométriques sur les vecteurs constitués des points avant et après déplacement. Les trois vecteurs reliant les points avant et après déplacement  $p_{(1)i}p_{(2)i}$   $\{i=1,2,3\}$  sont formés, puis déplacés parallèlement à eux-mêmes jusqu'à ce que les points  $p_{(1)i}$  coïncident avec l'origine du repère global. Dans cette configuration les points  $p_{(2)i}$  forment un plan normal à l'axe hélicoïdal, et leurs projections sur celui-ci coïncident avec un même point. L'équation de ce plan qui se trouve à une distance  $s$  de l'origine et qui est normal au vecteur unitaire  $e$  définissant l'orientation de l'AHF est :

$$e_x x + e_y y + e_z z = s \quad (2.5)$$

Les vecteurs  $p_{(1)i}p_{(2)i}$  ont pour coordonnées  $[\Delta_i x \ \Delta_i y \ \Delta_i z]$ , où  $\Delta_i x = x_{(2)i} - x_{(1)i}$ ,  $\Delta_i y = y_{(2)i} - y_{(1)i}$ , et  $\Delta_i z = z_{(2)i} - z_{(1)i}$ . Les extrémités de ces vecteurs appartiennent au plan normal à l'AHF, ils vérifient donc l'équation (2.5) du plan, qui peut être écrite après quelques manipulations, sous forme matricielle pour l'ensemble de ces points :

$$\begin{bmatrix} e_x / s \\ e_y / s \\ e_z / s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 x & \Delta_1 y & \Delta_1 z \\ \Delta_2 x & \Delta_2 y & \Delta_2 z \\ \Delta_3 x & \Delta_3 y & \Delta_3 z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = K \quad (2.6)$$

Ce qui nécessite l'inversion d'une matrice 3x3, qui peut être singulière (non inversible). Sachant que le vecteur  $e$  est unitaire,  $s$  peut être extrait de la solution du système (2.6)

et donc  $e$  peut être calculé. En définissant un vecteur  $v_{(1)}$  du point  $p_{(1)1}$  au point  $p_{(1)2}$ , le vecteur  $v_{(1)} \times e$  subit une rotation d'un angle  $\theta$  lorsque le corps tourne de la même quantité autour de l'AHF et le vecteur  $v_{(1)}$  se transforme en un vecteur  $v_{(2)}$ , reliant le point  $p_{(2)1}$  au point  $p_{(2)2}$ .

Par définition le cosinus de l'angle de rotation est :

$$\cos(\theta) = \frac{v_{(1)} \times e \cdot v_{(2)} \times e}{\|v_{(1)} \times e\| \|v_{(2)} \times e\|} \quad (2.7)$$

Une fois  $e$  et  $\theta$  déterminés, la matrice de rotation  $R$  et le vecteur de translation  $d$  peuvent être calculés par :

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) + v(\theta) e_x^2 & -\sin(\theta) e_z + v(\theta) e_y e_x & \sin(\theta) e_y + v(\theta) e_z e_1 \\ \sin(\theta) e_z + v(\theta) e_y e_x & \cos(\theta) + v(\theta) e_y^2 & -\sin(\theta) e_x + v(\theta) e_y e_z \\ -\sin(\theta) e_y + v(\theta) e_x e_z & \sin(\theta) e_x + v(\theta) e_y e_z & \cos(\theta) + v(\theta) e_z^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Avec  $v(\theta) = 1 - \cos(\theta)$

Et

$$d = p_{(2)1} - R p_{(1)1} \quad (2.9)$$

Sachant que le vecteur  $d$  est donné par la relation suivante :

$$d = \begin{bmatrix} s e_x - x_0 (R_{11} - 1) - y_0 R_{12} - z_0 R_{13} \\ s e_y - x_0 R_{21} - y_0 (R_{22} - 1) - z_0 R_{23} \\ s e_z - x_0 R_{31} - y_0 R_{32} - z_0 (R_{33} - 1) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$



Où  $(x_0, y_0, z_0)$  sont les coordonnées d'un point appartenant à l'AHF, et  $R_{ij}$  est l'élément  $(i, j)$  de la matrice de rotation  $R$ .

Pour localiser l'AHF, l'auteur [25] calcul le point d'intersection de l'AHF avec l'un des trois plans XY, XZ ou YZ. Afin d'obtenir l'intersection de l'AHF avec le plan YZ par exemple, il suffit de remplacer  $x_0$  par zéro dans l'équation (2.10) et de résoudre pour  $y_0$  et  $z_0$ .

$$u = s$$

$$e = s K$$

(2.11)

$$\cos(\theta) = \frac{v_{(1)} \times e \cdot v_{(2)} \times e}{\|v_{(1)} \times e\| \|v_{(2)} \times e\|}$$

$$(R - I) p_0 = s e - d$$

### 2.2.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes, sont des méthodes qui estiment les paramètres de l'AHF en passant par le calcul de la matrice de rotation suivi du calcul du vecteur de translation ou en calculant simultanément la matrice de rotation et le vecteur de translation.

#### 2.2.2.1 Calcul d'une matrice de rotation suivi du calcul du vecteur de translation

Dans les sections qui suivent, on va présenter des méthodes qui passent par le calcul d'une quantité intermédiaire (matrice de rotation, quaternion,...) afin d'en extraire les paramètres de l'axe.

### 2.2.2.1.1 Concept d'invariance ( Angeles 1 )

Le concept d'invariance est défini pour des quantités scalaires, vectorielles ou matricielles lors de changement de repère. Ayant deux repères  $\{A\}$  et  $\{B\}$  qui se distinguent par les positions de leurs origines et de leurs orientations. Si la matrice  ${}^A_R$  est la matrice de rotation qui permet d'orienter le repère  $\{B\}$  suivant le repère  $\{A\}$ . Si  $p$  représente un vecteur position dans l'espace, ses coordonnées sont données par  $p_A$  et  $p_B$  dans les deux repères  $\{A\}$  et  $\{B\}$  respectivement. Si  $f$  représente une fonction scalaire (qui retourne un scalaire),  $F$  représente une fonction vectorielle (qui retourne un vecteur) et  $F$  une fonction matricielle (qui retourne une matrice), on a d'après le concept d'invariance, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(p_A) &= f(p_B) \\ F_A &= {}^A_R F_B \\ F_A &= {}^A_R F_B {}^A_R^T \end{aligned} \tag{2.12}$$

Un exemple de la première équation dans (2.12) est quand  $f$  retourne la norme d'un vecteur. La norme d'un vecteur ne change pas quand celui-ci subit une rotation dans l'espace. Ces coordonnées changent mais pas sa norme. La même chose peut être dite pour le produit scalaire de deux vecteurs. L'exemple de la deuxième équation dans (2.12) est quand  $F$  représente le produit vectoriel de deux vecteurs. Si deux vecteurs subissent une rotation, le vecteur résultant du produit vectoriel de ces deux vecteurs subit la même rotation. Finalement, l'exemple de la troisième équation dans (2.12) est le sujet de la section suivante :

Angeles [26] a développé une méthode prenant en compte trois points ( $m = 3$ ) non colinéaires du corps rigide, et a appliqué le concept de l'invariance du moment d'inertie des trois points autour de leur centroïde afin de déterminer une matrice de rotation.

La méthode d'Angeles peut se résumer comme suit :

les coordonnées des deux centroïdes dans la première et deuxième position sont données par :

$$\bar{p}_{(1)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_{(1)i} \quad (2.13)$$

$$\bar{p}_{(2)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p_{(2)i}$$

les positions relatives des points par rapport à leurs centroïdes dans les deux positions sont données par :

$$p'_{(1)i} = p_{(1)i} - \bar{p}_{(1)} \quad (2.14)$$

$$p'_{(2)i} = p_{(2)i} - \bar{p}_{(2)}$$

le moment d'inertie  $MI$  des trois points dans la première position est donné par :

$$MI = \sum_{i=1}^3 m_i (p_{(1)i}^2 I - p'_{(1)i} p_{(1)i}^T) \quad (2.15)$$

Où,  $I$  est la matrice identité de dimension  $3 \times 3$ , et  $m_i$  la masse du point  $i$ .

En considérant des masses unitaires ( $m_i = 1$ ) l'équation (2.15) devient :

$$MI = \sum_{i=1}^3 (p_{(1)i}^2 I - p'_{(1)i} p_{(1)i}^T) \quad (2.16)$$

On note  $MI$  calculé dans la première position par la matrice  $MI_A$  et celui calculé dans la deuxième position par la matrice  $MI_B$ . On note aussi les vecteurs propres  $\{e_i\}$  et  $\{f_i\}$  de  $MI$  calculés dans les deux positions respectivement. La matrice de rotation décrivant le mouvement du corps rigide est  $R$ . En appliquant le concept d'invariance (équations (2.12)), on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} MI_A &= R MI_B R^T \\ f_i &= R e_i \end{aligned} \quad (2.17)$$

L'auteur détermine les matrices de rotation  $Q_1$  et  $Q_2$  représentant l'orientation des repères définis par les vecteurs propres  $\{e_i\}$  et  $\{f_i\}$  respectivement, par rapport au repère global. Finalement la matrice relative au mouvement des deux ensembles de vecteurs propres est donnée par :

$$R = Q_2 Q_1^T \quad (2.18)$$

Avec  $Q_1 = [e_1 \ e_2 \ e_3]$  et  $Q_2 = [f_1 \ f_2 \ f_3]$ , donc la solution consiste à trouver les valeurs propres et vecteurs propres associés du moment  $MI$  dans les deux configurations ( $MI_A$  et  $MI_B$ ).

Si on appelle  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  les trois valeurs propres de  $MI$ , on a :

$$\begin{aligned} 2(I_1 + I_2) &= tr(MI_A); \quad I_1^2 + I_2^2 + (I_1 + I_2)^2 = tr(MI_A^2) \\ 2(I_1 + I_2) &= tr(MI_B); \quad I_1^2 + I_2^2 + (I_1 + I_2)^2 = tr(MI_B^2) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Après quelques manipulations algébriques on trouve :

$$4I_1^2 - 2aI_1 + a^2 - 2b = 0 \quad (2.20)$$

Avec  $a$  et  $b$  des moyennes pour compenser la différence qui peut exister entre les invariants et qui est due au bruit de mesure affectant les coordonnées des trois points,  $a$  et  $b$  sont donnés par :  $a = \text{tr}(MI_A + MI_B)/2$  et  $b = \text{tr}(MI_A^2 + MI_B^2)/2$ .

En résolvant l'équation (2.20), on obtient deux valeurs pour  $I_1$ , soit  $I_1$  et  $I_2$  qui sont choisies tel que  $I_1 \leq I_2$ . La troisième valeur propre est donnée par  $I_3 = I_1 + I_2$ . Les vecteurs propres de  $MI$  associés aux valeurs propres calculées sont déterminés en calculant l'espace nul de  $(MI_A - I_i I)$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A_3 &= MI_A - I_3 I \\ A_2 &= MI_A - I_2 I \end{aligned} \quad (2.21)$$

Les deux matrices  $A_2$  et  $A_3$ , ainsi définies sont décomposées en un produit d'une matrice orthogonale  $q$  et d'une matrice triangulaire supérieure  $r$  par la décomposition  $QR$ . Les deux vecteurs propres  $e_2$  et  $e_3$  sont les produits vectoriels des deux premières lignes des matrices triangulaires correspondant aux matrices  $A_2$  et  $A_3$  respectivement. Le dernier vecteur propre  $e_1$  est déterminé par le produit vectoriel des deux vecteurs calculés :

$$e_1 = e_2 \times e_3 \quad (2.22)$$

Pour trouver l'ensemble des vecteurs propres correspondant à la deuxième configuration  $\{f_i\}$ , il suffit de remplacer  $MI_A$  par  $MI_B$  dans l'équation (2.21).

Une fois la matrice de rotation calculée par (2.18), le vecteur orientation de l'AHF et l'angle de rotation autour de celui-ci sont extraits de la façon suivante :

$$e = \frac{vect(R)}{\|vect(R)\|}$$

$$\cos(\theta) = (tr(R) - 1) / 2 \quad (2.23)$$

$$\sin(\theta) e = vect(R)$$

La position  $p_0$  de l'AHF est déterminée par la résolution du système suivant :

$$D p_0 = b \quad (2.24)$$

$$\text{Avec } D = \begin{bmatrix} R - I \\ e^T \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} R \bar{p}_{(1)} - \bar{p}_{(2)} + e e^T (\bar{p}_{(2)} - \bar{p}_{(1)}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La quantité de translation le long de l'AHF est déterminée par :

$$u = e^T (\bar{p}_{(2)} - \bar{p}_{(1)}) \quad (2.25)$$

L'auteur a présenté dans [27] une méthode basée sur l'approximation par moindres carrées, en passant par la décomposition polaire d'une matrice 3x3. Cette méthode permet de calculer la matrice de rotation en exploitant les déplacements de plus de trois points du corps rigide.

#### 2.2.2.1.2 Algèbre linéaire ( Laub )

Laub et Shiflett [28] ont utilisé l'algèbre linéaire pour déterminer la matrice de rotation  $R$  et le vecteur de translation  $d$ , leur méthode repose sur quelques opérations et

manipulations algébriques simples. La méthode utilise les coordonnées de trois points non colinéaires du corps rigide. Elle peut être résumée comme suit :

Ayant la relation entre les deux ensembles des trois points :

$$P_{(2)} = R P_{(1)} + d h^T \quad (2.26)$$

$P_{(1)}$  et  $P_{(2)}$  sont des matrices 3x3 regroupant les coordonnées des trois points dans la première et deuxième position respectivement.  $h$  est un vecteur colonne 3x1 composé d'éléments égaux à un.

En multipliant les deux membres de l'équation (2.26) par  $P_{(1)}^{-1}$ , on trouve :

$$R = Q - d v^T \quad (2.27)$$

avec :  $Q = P_{(2)} P_{(1)}^{-1}$  et  $v^T = h^T P_{(1)}^{-1}$  sont des données du problème. Sachant que l'inverse d'une matrice composée de trois autres matrices est donnée par [28] :

$$(A + B C D)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (D^{-1} + C A^{-1} B)^{-1} C A^{-1} \quad (2.28)$$

En utilisant (2.28) et en remplaçant  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  par  $Q$ ,  $-d$ ,  $v^T$  et  $I$  (matrice identité de dimension 3x3), on obtient :

$$(Q - d v^T)^{-1} = Q^{-1} + \frac{Q^{-1} d v^T Q^{-1}}{1 - v^T Q^{-1} d} \quad (2.29)$$

Sachant que le déterminant de la matrice de rotation  $R = Q - d.v^T$  doit être égale à un et que :

$$\det(Q - d.v^T) = (1 - v^T Q^{-1} d) \det(Q) = 1 \quad (2.30)$$

En remplaçant dans (2.29), on trouve les solutions suivantes pour  $R$  et  $d$  :

$$d = \frac{1}{v^T v} [Q - \det(Q) Q^{-T}] v \quad (2.31)$$

$$R = Q - d.v^T$$

### 2.2.2.1.3 Décomposition polaire ( Veld )

La relation entre deux ensembles de points du corps rigide dans deux positions différentes  $\{ p_{(1)i} \text{ et } p_{(2)i}, i=1,2,...,m \}$  de celui-ci peut être écrite sous la forme suivante :

$$p_{(2)i} = R p_{(1)i} + d \quad (2.32)$$

En réalité les points  $p_{(1)i}$  et  $p_{(2)i}$  sont mesurés, donc affectés de bruit; la conséquence est que la relation (2.32) devient :

$$p_{(2)i} = R p_{(1)i} + d + \varepsilon_i \quad (2.33)$$

Avec  $\varepsilon_i$ , l'erreur à minimiser. Le problème consiste, donc à minimiser la somme des carrées des erreurs  $\varepsilon_i$  ( $i=1,2...,m$ ) :



$$\text{Min}(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|\varepsilon_i\|^2) \quad (2.34)$$

En introduisant les centroides et les positions relatives des points par rapport à leurs centroides (2.14), et à partir des deux équations (2.33) et (2.34) on trouve la quantité à minimiser :

$$\text{Min}[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (p'_{(2)i}{}^T p'_{(2)i} + p'_{(1)i}{}^T p'_{(1)i} - 2 p'_{(2)i}{}^T R p'_{(1)i})] \quad (2.35)$$

Puisque les deux premiers termes sont positifs dans (2.35), minimiser l'erreur dans (2.34) revient à maximiser le terme :

$$\text{Max}[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (p'_{(2)i}{}^T R p'_{(1)i})] \quad (2.36)$$

Sachant que pour deux vecteurs colonne  $a$ ,  $b$  de dimension  $3 \times 1$ , et une matrice  $R$  ( $3 \times 3$ ) on a la propriété suivante :  $a^T R b = \text{tr}(R^T a b^T)$

Ceci permet de réécrire l'équation (2.36) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Max}[\text{tr}(R^T \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p'_{(2)i} p'_{(1)i}{}^T)] \\ & = \text{Max}[\text{tr}(R^T C)] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Où  $C$  est la matrice de corrélation et est définie par :

$$C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m p'_{(2)i} p'_{(1)i}{}^T \quad (2.38)$$

Pour résoudre le problème de maximisation de la trace du produit matriciel  $R^T C$ , différentes approches ont été utilisées :

Spoor et Veldpaus [29], ainsi que Horn et al [30] ont développé une méthode qui repose sur la décomposition d'une matrice carrée, par valeurs propres et vecteurs propres associés. Leur méthode peut être résumée comme suit :

La décomposition polaire de la matrice  $C$  consiste à décomposer cette matrice carrée en un produit de deux matrices, une matrice orthogonale propre  $U$  ( $UU^T = I$  et  $\det(U) = 1$ ) et une matrice définie semi-positive  $S$  (dont les valeurs propres sont supérieures ou égales à zéro), tel que :

$$\begin{aligned} C &= US \\ S &= (C^T C)^{1/2} \\ U &= C(C^T C)^{-1/2} \end{aligned} \tag{2.39}$$

Maximiser la trace de la matrice  $R^T C$  revient donc à maximiser la trace de la matrice  $R^T U S$ . La matrice  $S$  peut s'écrire sous la forme d'une somme de matrices élémentaires, en se basant sur (2.39) :

$$S = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} c_i c_i^T \tag{2.40}$$

Les  $\lambda_i$  et  $c_i$  sont les valeurs propres et vecteurs propres associés de la matrice  $C^T C$ . En utilisant (2.40) on a :

$$tr(R^T C) = tr(R^T U S) = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} tr(R^T U c_i c_i^T) \tag{2.41}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \text{tr}(R^T U c_i c_i^T) &= \text{tr}(c_i^T R^T U c_i) = \text{tr}((R c_i)^T (U c_i)) = \text{tr}((R c_i) \bullet (U c_i)) \\ &= (R c_i) \bullet (U c_i) \leq 1 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Puisque les deux matrices  $R$  et  $U$  sont orthogonales propres, les vecteurs  $c_i$  sont unitaires et que les  $\sqrt{\lambda_i}$  sont les valeurs propres de  $S$ , on a donc :

$$\text{tr}(R^T C) = \text{tr}(R^T U S) \leq \sum_{i=1}^3 \sqrt{\lambda_i} = \text{tr}(S) \quad (2.43)$$

Donc la trace de la matrice  $R^T C$  est maximale, lorsque la matrice  $R^T U S$  est égale à  $S$ .

$$R^T U = I \Rightarrow U = R \quad (2.44)$$

On a donc :

$$C = R S \quad (2.45)$$

En décomposant la matrice  $C^T C$  par valeurs propres et vecteurs propres associés on obtient :

$$\begin{aligned} C^T C &= V D^2 V^T = S^2 \\ \Rightarrow S &= V D V^T \end{aligned} \quad (2.46)$$

La matrice  $D^2$  est une matrice diagonale de dimension 3x3, contenant les valeurs propres de la matrice  $C^T C$  et  $V$  est une matrice de dimension 3x3 composée des trois vecteurs propres associés aux valeurs propres dans  $D^2$ .

En utilisant (2.46) dans (2.45) on obtient :

$$\begin{aligned} C &= R(V D V^T) \\ \Rightarrow C V &= R V D = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \end{aligned}$$

Les  $b_i$  sont les vecteurs colonnes de la matrice  $CV$  et :

$$R = \left[ \frac{1}{D_{11}} b_1 \quad \frac{1}{D_{22}} b_2 \quad \frac{1}{D_{33}} b_3 \right] V^T \quad (2.47)$$

Pour assurer l'orthogonalité de la matrice de rotation  $R$  les auteurs [29] propose la solution suivante :

$$R = \left[ \frac{1}{D_{11}} b_1 \quad \frac{1}{D_{22}} b_2 \quad \frac{1}{D_{11} \cdot D_{22}} b_1 \times b_2 \right] V^T \quad (2.48)$$

Une fois la matrice  $R$  déterminée, le vecteur de translation  $d$  est calculé par :

$$d = \bar{p}_{(2)} - R \bar{p}_{(1)} \quad (2.49)$$

L'orientation de l'AHF et l'angle de rotation autour de celui-ci, sont donnés par les équations (2.23).

Pour la localisation de l'axe, les auteurs [29] ont utilisé la projection de l'origine du repère global sur l'axe. Ce point est calculé par la formule suivante :

$$p_0 = -\frac{1}{2} e \times (e \times d) + \frac{\sin(\theta)}{2(1 - \cos(\theta))} (e \times d) \quad (2.50)$$

La quantité de translation le long de l'AHF est calculée par :

$$u = e^T d \quad (2.51)$$

Veldpaus et al [31], reprennent le même développement que Spoor et al [29] sans le passage par le calcul des valeurs et vecteurs propres. Les auteurs [31] utilisent le théorème de Cayley-Hamilton qui stipule que chaque matrice doit vérifier son équation caractéristique. Pour la matrice  $S$  on a :

$$S^2 - \beta_1 S + \beta_2 I = S^a \quad (2.52)$$

Tel que :

$$\beta_1 = \text{tr}(S) \text{ et } \beta_2 = \text{tr}(S^a) \quad (2.53)$$

$S^a$  est la matrice adjointe de la matrice  $S$  et qui est définie pour  $S = [s_1 \ s_2 \ s_3]$ , (les  $s_i$  sont les vecteurs colonnes de  $S$ ) par  $S^a = [s_2 \times s_3 \ s_3 \times s_1 \ s_1 \times s_2]$ .

Sachant que  $S = R^T C$ ,  $S^a = R^T C^a$  et  $S^2 = C^T C$ , l'équation (2.52) devient :

$$C^T C - \beta_1 R^T C + \beta_2 I = R^T C^a$$

En isolant  $R$  on a :

$$R = (\beta_1 C + C^a)(C^T C + \beta_2 I)^{-1} \quad (2.54)$$

Les seules inconnues dans (2.54) sont les variables  $\beta_1$  et  $\beta_2$ . En combinant les deux équations de (2.53) on obtient :

$$\beta_1^2 - 2\beta_2 = \alpha_1^2 \text{ et } \beta_2^2 = \alpha_2^2 + 2\beta_1 \alpha_3 \quad (2.55)$$

Avec :  $\alpha_1^2 = \text{tr}(C^T C)$ ,  $\alpha_2^2 = \text{tr}(C^T C)^a$  et  $\alpha_3 = \det(C)$ .

Les formules pour l'extraction des paramètres de l'AHF sont les mêmes que pour la méthode précédente [29].

Woltring et al [20], ont affirmé que sous la condition d'une distribution isotrope (qui n'est pas suivant un plan ou une direction particuliers) des points du corps rigide et d'un bruit de moyenne nulle, non corrélé et isotrope (identique sur toutes les composantes), affectant les coordonnées de ces points; la projection du point milieu du segment reliant les deux centroides dans les deux positions du corps, représente le point le plus précis pour localiser l'AHF. Ce point est calculé par :

$$p_0 = \frac{1}{2}(\bar{p}_{(1)} + \bar{p}_{(2)}) + (2\text{tg}(\theta/2))^{-1}(e \times (\bar{p}_{(2)} - \bar{p}_{(1)})) \quad (2.56)$$

#### 2.2.2.1.4 Décomposition par valeurs singulières ( SVD )

Arun et al [32] ont proposé de résoudre le même problème de minimisation en utilisant un algorithme de décomposition en valeurs singulières de la matrice de corrélation des points. La décomposition en valeurs singulières consiste à décomposer une matrice en un produit de trois matrices  $C = U W V^T$ , dont  $U$  et  $V$  sont orthogonales et  $W$  est diagonale. On a :

$$\begin{aligned} \text{tr}(R^T C) &= \text{tr}(R^T U W V^T) \\ &= \text{tr}(V^T R^T U W) \\ &= \text{tr}(Q W) \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\text{Avec } Q = V^T R^T U$$

La matrice  $Q$  est orthogonale, puisque par définition les matrices  $V$ ,  $R$ , et  $U$  le sont. Du fait que la matrice  $W$  est diagonale, les seuls éléments de  $Q$  qui ont de l'influence sur le produit  $QW$  sont ceux de la diagonale de  $Q$ . La trace est donc maximale, quand les éléments de la diagonale de  $Q$  sont maximaux. Les deux contraintes (éléments de la diagonale maximaux et orthogonalité) sont vérifiées pour la matrice unitaire. Donc si :

$$\begin{aligned} Q &= I \\ \Rightarrow V^T R^T U &= I \\ \Rightarrow R &= UV^T \end{aligned} \quad (2.58)$$

Cette même méthode a été améliorée pour éviter le cas où la solution correspondrait à une matrice de réflexion [33-35], par l'ajout d'une matrice intermédiaire :

$$R = U \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \det(UV^T) \end{bmatrix} V^T \quad (2.59)$$

Une fois la matrice de rotation estimée, les paramètres de l'AHF sont extraits de la même manière que la méthode précédente.

#### 2.2.2.1.5 Quaternion unitaire (UQ)

Horn [36], a développé une méthode analytique basée sur la représentation de la rotation par un quaternion unitaire. Son algorithme résout un problème de maximisation du produit scalaire des vecteurs de position calculés et mesurés. La résolution nécessite le calcul du vecteur propre associé à la plus grande valeur propre positive d'une matrice 4x4 symétrique, dont les éléments sont une combinaison de sommes et de produits des

coordonnées des différents points. Une fois le quaternion unitaire calculé, la matrice de rotation peut être déterminée. Cette méthode est décrite comme suit :

En reprenant l'expression de l'erreur à minimiser (2.36), on se retrouve à maximiser l'expression qui représente le produit scalaire de l'image calculée  $R.p'_{(1)i}$  d'un point initial (après rotation) avec son image mesurée  $p'_{(2)i}$ . Cette expression est donnée par :

$$Max[\sum_{i=1}^m (p'_{(2)i}{}^T R p'_{(1)i})] \quad (2.60)$$

En représentant la rotation par un quaternion unitaire et après quelques manipulations algébriques, l'expression dans (2.60) prend la forme suivante :

$$Max(q^T N q) \quad (2.61)$$

Où  $q$  set un quaternion unitaire et  $N$  est une matrice 4x4 symétrique, cette dernière est donnée par :

$$N = \begin{bmatrix} (M_{11} + M_{22} + M_{33}) & M_{23} - M_{32} & M_{31} - M_{13} & M_{12} - M_{21} \\ M_{23} - M_{32} & (M_{11} - M_{22} - M_{33}) & M_{12} + M_{21} & M_{31} + M_{13} \\ M_{31} - M_{13} & M_{12} + M_{21} & (-M_{11} + M_{22} - M_{33}) & M_{23} + M_{32} \\ M_{12} - M_{21} & M_{31} + M_{13} & M_{23} + M_{32} & (-M_{11} - M_{22} + M_{33}) \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Les  $M_{ij}$  sont les éléments de la matrice  $M$  définie par :  $M = mC$ , où  $m$  est le nombre de points, et  $C$  est la matrice de corrélation définie dans l'équation (2.38).

L'auteur démontre que le quaternion qui représente la solution au problème de maximisation (2.61) est le vecteur propre de la matrice  $N$  correspondant à la plus



grande valeur propre positive de celle-ci. Une fois le quaternion unitaire estimé, la matrice de rotation correspondante est calculée et les paramètres de l'AHF sont extraits.

## 2.2.2.2 Calcul simultané de la matrice de rotation et du vecteur de translation

### 2.2.2.2.1 Matrice homogène

Kinzel et al [37], ont publié une méthode pour estimer le mouvement entre deux segments articulés. Cette méthode est basée sur la représentation du mouvement (rotation et translation) par une matrice 4x4. Cette matrice homogène relie les points avant et après déplacement par la relation suivante:

$$P_{(2)} = H P_{(1)} \quad (2.63)$$

Où  $H$  est une matrice 4x4, dont la dernière ligne est composée des éléments  $[0,0,0,1]$ , la dernière colonne du vecteur de translation  $d$ , et finalement d'une matrice de rotation  $R$ , tel que :

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

Les matrices  $P_{(1)}$  et  $P_{(2)}$  sont des matrices 4x4 augmentées, dont la dernière ligne est composée des éléments  $[1,1,1,1]$ ; et les vecteur colonnes représentent les coordonnées de quatre points non coplanaires.

La solution nécessite une inversion d'une matrice augmentée 4x4 composée des coordonnées de quatre points du corps rigide, qui doivent être non coplanaires.

$$H = P_{(2)} P_{(1)}^{-1} \quad (2.65)$$

Cette méthode peut être généralisée à plus de quatre points en substituant l'équation (2.65) à :

$$H = (P_{(2)} P_{(1)}^T)(P_{(1)} P_{(1)}^T)^{-1} \quad (2.66)$$

Gupta et Chutakanonta [38] résolvent le même problème (2.63) en transposant les deux membres de l'équation :

$$P_{(2)}^T = P_{(1)}^T H^T \quad (2.67)$$

L'équation (2.67) représente un système surdéterminé (le nombre d'équations excède le nombre d'inconnues). Leur méthode consiste à décomposer la matrice  $P_{(1)}^T$  par valeurs singulières tel que :

$$\begin{aligned} P_{(1)}^T &= U W V^T \\ \Rightarrow P_{(2)}^T &= U W V^T H^T \\ \Rightarrow H &= P_{(2)} U W^{-1} V^T \end{aligned} \quad (2.68)$$

Une fois  $H$  estimée, une autre décomposition par valeurs singulières est effectuée sur la sous matrice  $R$  de  $H$ , tel que :

$$\begin{aligned} R &= U W V^T \\ &= (U V^T)(V W V^T) \\ \Rightarrow \tilde{R} &= U V^T \text{ et } E = V W V^T - I \end{aligned} \quad (2.69)$$

Les matrices  $\tilde{R}$  et  $E$  sont la matrice de rotation et la matrice des erreurs estimées. Les auteurs [38] calculent les paramètres de l'AHF à partir des équations suivantes :

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\text{tr}(R)-1}{2}\right) \\ e &= \frac{\text{vect}(R)}{\sin(\theta)}\end{aligned}\tag{2.70}$$

La quantité de translation le long de l’AHF et la position de celui-ci sont estimés par la résolution du système suivant :

$$\begin{bmatrix} e & I-R \\ 0 & e^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}\tag{2.71}$$

#### 2.2.2.2.2 Quaternion dual (DQ)

Walker et al [39], ont développé un algorithme basé sur les quaternions duaux qui peut prendre en considération plus de trois points du corps rigide ainsi que des vecteurs d’orientation. C’est une méthode qui au lieu de minimiser l’erreur en trouvant la matrice de rotation, à partir de laquelle le vecteur de translation est déterminé; elle prend en compte ces deux paramètres pour minimiser l’erreur. Ce qui a pour conséquence d’avoir deux paramètres optimaux calculés indépendamment l’un de l’autre. La résolution du problème passe par le calcul du vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre positive d’une matrice 4x4 symétrique. L’auteur a utilisé la projection de l’origine du repère sur l’axe pour localiser celui-ci.

On présente dans ce qui suit une version modifiée de la méthode originale, en considérant uniquement les vecteurs position et en fixant les coefficients de pondération à un. Dans cette méthode la rotation et la translation sont représentées par un quaternion dual  $\hat{q}$ . Ce quaternion est composé d’une partie réelle  $r$  et d’une partie duale  $s$ , ces deux parties sont des vecteurs colonnes 4x1 tel que :

$$\hat{q} = r + \varepsilon s \quad (2.72)$$

$$\text{Avec: } r = \begin{bmatrix} \sin(\theta/2)e \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \text{ et } s = \begin{bmatrix} (u/2)\cos(\theta/2)e + \sin(\theta/2)(p_0 \times e) \\ -(u/2)\sin(\theta/2) \end{bmatrix}$$

Où  $e$  est le vecteur orientation de l'axe de rotation,  $\theta$  et  $u$  sont l'angle de rotation autour et la quantité de translation le long de l'axe, respectivement, et finalement  $p_0$  est le vecteur position de l'axe.

Avec le formalisme des quaternions duals l'expression de l'erreur à minimiser devient :

$$\text{Min}(E = r^T C_1 r + s^T C_2 s + s^T C_3 r + C_4) \quad (2.73)$$

Avec :

$$\begin{aligned} C_1 &= -2 \sum_{i=1}^m Q_{\hat{q}}(P_{2i})^T W_{\hat{q}}(P_{1i}) ; \quad C_2 = m I \\ C_3 &= 2 \sum_{i=1}^m (W_{\hat{q}}(P_{1i})^T Q_{\hat{q}}(P_{2i})) ; \quad C_4 = \sum_{i=1}^m (W_{\hat{q}}(P_{1i})^T Q_{\hat{q}}(P_{2i})) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$P_{1i} = [p_{1i}/2; 0] ; \quad P_{2i} = [p_{2i}/2; 0]$$

$W_{\hat{q}}(q)$  et  $Q_{\hat{q}}(q)$  sont définis par les équations dans (1.16).

Avec :  $sk$ ,  $q_v$  et  $q_s$  sont l'opérateur anti-symétrique, la partie vectorielle du quaternion  $q$  et sa partie scalaire respectivement.

Le quaternion dual qui représente la solution au problème posé par (2.73), a sa partie réelle  $r$  qui est égale au vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre positive d'une matrice  $A$  définie par :

$$A = (1/2)(C_3^T(C_2 + C_2^T)^{-1}C_3 - C_1 - C_1^T) \quad (2.75)$$

Sa partie duale est calculée par la relation suivante :

$$s = -(C_2 + C_2^T)^{-1} C_3 r \quad (2.76)$$

Le vecteur translation est donné par :

$$D = W(r)^T s \quad (2.77)$$

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'orientation de l'axe, l'angle de rotation autour et la quantité de translation le long de celui-ci, sont définis par :

$$\begin{aligned} e &= \frac{r_v}{\|r_v\|} \\ \cos(\theta) &= r_s^2 - \|r_v\|^2 \\ \sin(\theta) &= 2r_s \|r_v\| \\ u &= \frac{2s_s}{\sin(\theta/2)} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Où  $r_s$  et  $s_s$  représentent les parties scalaires des quaternions  $r$  et  $s$  respectivement.

La position de l'axe est définie par la projection de l'origine du repère global sur l'AHF.

$$D p_0 = b$$

$$\text{Avec : } D = \begin{bmatrix} sk(-e) \\ e^T \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} s_v - \frac{1}{2}u[\cot(\theta/2)]e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

### 2.2.2.2.3 Approche linéaire ( RT )

Zhuang et al [40], dans la même optique que la méthode précédente, ont utilisé la représentation de la rotation par quaternion unitaire et ont présenté le problème sous forme d'un ensemble d'équations pour estimer simultanément la matrice de rotation et le vecteur de translation.

La méthode consiste à résoudre un système d'équations de la forme :

$$AZ = b \quad (2.80)$$

Tel que la matrice  $A$  ( $3m \times 6$ ) et le vecteur colonne  $b$  ( $3m \times 1$ ) sont définis par :

$$A = \begin{bmatrix} sk(Pp_1) & I \\ sk(Pp_1) & I \\ \vdots & \vdots \\ sk(Pp_m) & I \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} Pm_1 \\ Pm_2 \\ \vdots \\ Pm_m \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

$$Pp_i = p_{1i} + p_{2i} \text{ et } Pm_i = p_{1i} - p_{2i}$$

La solution du système (2.80), soit le vecteur colonne  $Z$  de dimension  $6 \times 1$  se compose de deux vecteurs colonnes de dimension  $3 \times 1$ , appelés  $X$  et  $Y$  respectivement, tel que  $Z = [X \ Y]^T$ . Une fois la solution  $Z$  calculée, le vecteur orientation, l'angle de rotation ainsi que le vecteur de translation sont déterminés par :

$$\begin{aligned}
e &= \frac{X}{\|X\|} \\
\theta &= 2 \tan^{-1} \left( \frac{X_j}{e_j} \right) \\
(sk(X) - I) d &= Y
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Où  $j$  correspond à l'indice de l'élément de  $e$  qui a la plus grande valeur absolue.

Les différentes méthodes présentées dans les sections précédentes sont regroupées dans le Tableau I.

Tableau I

Tableau récapitulatif des différentes méthodes présentées, pour l'estimation de l'AHF  
(  $m$  : nombre de points nécessaires, n-cl : non colinéaires, n-cp : non coplanaires )

AHF	Méthode	m
Méthodes directes	Algèbre vectorielle	3 n-cl
	Beggs [25]	3 n-cl
Méthodes indirectes	Angeles [26]	3 n-cl
	Laub [41]	3 n-cl
	Veld [31]	$\geq 3$ n-cl
	SVD [32]	$\geq 3$ n-cl
	UQ [36]	$\geq 3$ n-cl
	DQ [39]	$\geq 3$ n-cl
	RT [40]	$\geq 3$ n-cl
	Matrice homogène [38]	$\geq 4$ n-cp

## 2.3 Méthodes utilisées pour l'estimation de l'axe hélicoïdal infini

Pour l'AHI, les données de déplacement des points solidaires au corps rigide ( $p_i, i=1,2,...,m$ ), ainsi que leurs vitesses linéaires ( $v_i, i=1,2,...,m$ ) sont nécessaires pour la détermination de celui-ci. Le paramètre le plus important à déterminer est la vitesse angulaire, à partir de laquelle les autres paramètres de l'AHI ( $\dot{u}$  : la vitesse de translation le long de l'axe,  $p_0$  : la position et  $e$  : l'orientation de cet axe) sont calculés. Dans ce qui suit on présente quelques méthodes publiées dans la littérature.

### 2.3.1 Algèbre vectorielle

Les premières méthodes développées sont basées sur une approche vectorielle [24, 25]. Ayant les vecteurs positions ( $p_1, p_2, p_3$ ) et les vecteurs vitesses ( $v_1, v_2, v_3$ ) de trois points du corps rigide, le vecteur vitesse angulaire  $\omega$  est donné par :

$$\omega = \frac{(v_3 - v_1) \times (v_2 - v_1)}{(v_3 - v_1) \cdot (p_2 - p_1)} \quad (2.83)$$

Bien que théoriquement le résultat ne dépende pas de l'ordre choisi des points; dans le cas de données bruitées, le résultat va dépendre du choix de ces points. Dans l'équation (2.83) par exemple, le point « un » joue le rôle de l'origine du repère mobile (attaché au corps rigide).

Une fois le vecteur vitesse angulaire estimé, les autres paramètres de l'AHI, soit son orientation, sa position et la vitesse de translation le long de celui-ci, sont déterminés de la façon suivante pour les cinq méthodes qui sont présentées dans cette section :



$$e = \frac{\omega}{\|\omega\|}$$

$$p_0 = \bar{p} + \omega \times \frac{\bar{v}}{\|\omega\|^2} \quad (2.84)$$

$$\dot{u} = e^T \bar{v}$$

Avec  $\bar{p}$  et  $\bar{v}$  la position et la vitesse respectivement, du centroïde des points.

### 2.3.2 Concept d'Invariance ( Angeles 2 )

Angeles [42], a publié une méthode qui exploitait le concept d'invariance associé au moment d'inertie de trois points non colinéaires. Dans d'autres publications [27, 43], le même auteur a modifié sa méthode pour prendre en compte plus de trois points. Dans [43], Angeles a gardé le même concept d'invariance pour l'extension de sa méthode à plus de trois points. D'après l'auteur cette méthode est plus robuste que celle qu'il a développé dans [27] et qui est basée sur une approximation au sens des moindres carrées de la solution d'un système d'équations surdéterminé. Pour localiser l'AHI, l'auteur a utilisé la projection de l'origine du repère global sur l'AHI.

La méthode d'Angeles peut se résumer en quelques étapes :

Calcul du moment d'ordre deux  $MI$  et du vecteur vitesse angulaire  $\omega$  par :

$$\begin{aligned} MI &= tr(P' P'^T) I - P' P'^T \\ \omega &= 2MI^{-1} vect(V' P'^T) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Où les matrices  $P'$  et  $V'$  représentent les positions et les vitesses relatives des points par rapport à leur centroïde, respectivement. Pour l'estimation des paramètres de l'AHI les équations (2.84) sont utilisées.

### 2.3.3 Algèbre linéaire ( Shiflett )

Laub et Shiflett [41], ont développé une méthode basée sur l'algèbre linéaire pour trouver le vecteur vitesse angulaire et le vecteur vitesse de translation, et ce pour trois points non colinéaires du corps rigide. Les mêmes auteurs [44] ont amélioré leur méthode pour prendre en compte plus de trois points. Ils ont calculé le vecteur vitesse angulaire et le vecteur translation en minimisant une fonction coût. Le vecteur vitesse angulaire est calculé par :

$$\omega = (tr(A)I - A)^{-1} y \quad (2.86)$$

Avec des quantités définies par :

$$\begin{aligned} A &= P \left( I - \frac{h h^T}{m} \right) P^T \\ y &= vect(B) \\ B &= V \left( I - \frac{h h^T}{m} \right) P^T - P \left( I - \frac{h h^T}{m} \right) V^T \end{aligned} \quad (2.87)$$

Où les matrices  $P$  et  $V$  représentent respectivement, les positions et vitesses des  $m$  points du corps rigide. Pour l'estimation des paramètres de l'AHI les équations (2.84) sont utilisées.

### 2.3.4 Minimisation au sens des moindres carré ( Sommer )

Sommer [45, 46], minimise au sens des moindres carrées une erreur résiduelle et utilise la projection du centroïde des points sur l'AHI pour localiser ce dernier. L'erreur à minimiser est :

$$\text{Min}(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \|\varepsilon_i\|^2) \quad (2.88)$$

Tel que :

$$\varepsilon_i = v_i - (\dot{u} e + \omega \times (p_i - p_0)) \quad (2.89)$$

Le vecteur vitesse angulaire trouvé par l'auteur est :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_{22} + \bar{X}_{33} & -\bar{X}_{12} & -\bar{X}_{13} \\ -\bar{X}_{12} & \bar{X}_{11} + \bar{X}_{33} & -\bar{X}_{23} \\ -\bar{X}_{13} & -\bar{X}_{23} & \bar{X}_{11} + \bar{X}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{V}_{32} - \bar{V}_{23} \\ \bar{V}_{13} - \bar{V}_{31} \\ \bar{V}_{21} - \bar{V}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Tel que :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (p_i - \bar{p})(p_i - \bar{p})^T \\ \bar{V} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_i (p_i - \bar{p})^T \end{aligned} \quad (2.91)$$

Avec  $\bar{p}$  le vecteur position du centroïde des points. Pour l'estimation des paramètres de l'AHI les équations (2.84) sont utilisées.

### 2.3.5 Décomposition par valeurs singulières

Woltring et al [5] ont utilisé la relation mettant en évidence le vecteur vitesse angulaire et la dérivée de la matrice de rotation. Cette dernière est estimée par la méthode SVD et sa dérivée par la méthode de la différence centrale. Pour localiser l'AHI, les auteurs ont utilisé la projection du centroïde des points sur l'axe.

La matrice  $W$  est la matrice de produit vectoriel, elle est reliée au vecteur vitesse angulaire  $\omega$  par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\omega &= \text{vect}(W) \\ W &= \text{sk}(\omega)\end{aligned}\tag{2.92}$$

Cette matrice est égale au produit de la dérivée de la matrice de rotation et de la transposée de celle-ci :

$$W = \dot{R} R^T\tag{2.93}$$

La dérivée de la matrice de rotation  $R$  est calculée par la méthode de la différence centrale. Si la matrice de rotation est échantillonnée, donc connue pour des instants espacés d'un certain intervalle  $\Delta t$  correspondant à la période d'échantillonnage; à l'instant  $t$  la matrice  $W$  et donc le vecteur  $\omega$  est approximée par :

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{4\Delta t} (R_+ R_-^T - R_- R_+^T) \\ \omega(t) &= \text{vect}(W)\end{aligned}\tag{2.94}$$

Où  $R_+$  et  $R_-$  correspondent à la matrice de rotation évaluée après et avant l'instant  $t$  respectivement. Pour l'estimation des paramètres de l'AHI les équations (2.84) sont utilisées.

## 2.4 Études comparatives concernant l'AHF

Plusieurs de ces méthodes ont été comparées. Dans ce qui suit on présente un résumé de quelques études comparatives publiées dans la littérature.

Fenton et Shi [23] ont comparé les méthodes de Beggs [24], Angeles [26], Laub et Shiflett [28], Bottema et Roth [23] et celle de Spoor et Veldpaus [29]. Les auteurs ont effectué une simulation en créant des points à partir de paramètres générés aléatoirement (axe de rotation, angle de rotation et quantité de translation). À partir de ces points, les différentes méthodes ont été utilisées pour retrouver ces paramètres. En calculant l'erreur relative entre le paramètre réel (celui avec lequel on a généré les points) et estimé (à partir des points générés), les auteurs ont conclu que la méthode d'Angeles et de Laub et Shiflett étaient les plus précises, par contre celles de Beggs et Spoor et Veldpaus étaient les moins précises des cinq méthodes comparées.

Les auteurs [23] ont aussi évalué les sensibilités des différents algorithmes au bruit de mesure en rajoutant un bruit aux coordonnées des deux ensembles de points, ce bruit avait une amplitude qui était de 0,01 à 0,1% de la valeur des coordonnées. Quatre fonctions ont été calculées pour mesurer la sensibilité au bruit des paramètres suivants: la quantité de translation, la quantité de rotation, la position de l'axe par rapport à un repère global et la différence entre les coordonnées des points mesurées et calculées. Les auteurs ont trouvé que la méthode de Beggs [24] était la plus sensible en ce qui concerne la translation, par contre celle de Spoor [29] et celle de Laub [28] étaient les moins sensibles pour le même paramètre. Pour l'angle de rotation, la moins sensible des cinq

méthodes était celle d'Angeles [26]. En ce qui concerne la position de l'axe, la méthode de Beggs présentait la plus faible sensibilité. Et finalement, la méthode de Bottema [23] était la moins sensible en ce qui concerne la différence entre les coordonnées calculées et mesurées.

Finalement, les auteurs [23] recommandent l'utilisation de la méthode de Laub, qui présente un bon compromis entre le temps de calcul, la précision et la sensibilité au bruit de mesure.

Dans cette comparaison [23], les auteurs ne donnent aucun indice sur les amplitudes de la rotation ou de la translation qui doivent être trouvées, ni sur le nombre d'itérations utilisées pour le calcul statistique qu'ils ont fournis. Il serait intéressant de combiner les deux études (précision et sensibilité). C'est-à-dire de comparer les différentes méthodes en terme de précision en rajoutant du bruit sur les deux ensembles de points et d'effectuer les comparaisons par rapport aux paramètres réels.

Walker et al [39], ont effectué une simulation pour comparer leur méthode (DQ) avec celle de Arun et al [32] (SVD), en terme de précision sur le calcul de l'angle de rotation et du vecteur de translation. À partir d'un ensemble de points de coordonnées connues, les auteurs ont généré les points correspondants, après une rotation de 36 deg autour d'un axe connu. Le vecteur de translation était fixé à  $d = (7, 8, 13)^T$ . Les points ainsi obtenus ont été corrompus avec un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance égale à 0,25. Les auteurs ont comparé l'angle de rotation et le vecteur de translation calculés par les deux méthodes (DQ, SVD), avec les deux paramètres réels (avec lesquels les points ont été générés). L'étude a été effectuée pour des ensembles constitués de 5, 10, 20 et 30 points. Les résultats obtenus ont révélés que les deux méthodes étaient équivalentes en ce qui concerne l'angle de rotation, l'écart type était de 0,147 deg pour un ensemble de 5 points. Par contre pour le vecteur de translation la méthode DQ apportait en moyenne 20 % d'amélioration par rapport à la méthode SVD. Pour un

nombre de points égal à 5, les écarts type sur les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  du vecteur de translation étaient inférieurs à l'unité pour la méthode DQ, alors qu'ils dépassaient l'unité pour la méthode SVD. Les auteurs [39] n'ont pas comparé les deux méthodes en terme d'orientation et de localisation de l'axe hélicoïdal dans l'espace.

Challis [47], a comparé les méthodes de Beggs [24], Laub et Shiflett [28] et celle de Veldpaus [31]. L'auteur a comparé les trois méthodes sous différentes conditions. Il a généré des données représentant les coordonnées 3D de trois marqueurs, il a rajouté un bruit gaussien isotrope (de mêmes amplitudes sur les trois coordonnées des points) puis non isotrope (le niveau du bruit sur la coordonnées «  $y$  » était deux fois plus important que les deux autres coordonnées) et a comparé les performances de ces trois méthodes. Sa conclusion était que la méthode de Veldpaus et al [31] était la plus précise des trois. Ses comparaisons portaient sur l'angle de rotation et le vecteur de translation. Par exemple, pour un bruit isotrope avec un écart type égale à 1,5 mm, l'erreur relative moyenne sur cent angles de rotation qui pouvaient prendre des valeurs entre -180 et +180 deg est de 9,28 % pour la méthode de Veldpaus [31], de 15,62% pour la méthode de Laub [28] et de 27,39 % pour la méthode de Beggs. L'auteur [47] a calculé une erreur absolue moyenne, ce qui ne permet pas de voir l'influence de l'amplitude de l'angle de rotation sur cette erreur.

Eggert et al [48] ont comparé les méthodes de Arun [32] (SVD), Walker [39] (DQ), et Horn [30, 36] (Veld, UQ) sous différentes conditions. Les auteurs ont effectué une simulation en générant des points et en rajoutant un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type variable allant de 0 à l'unité. L'ajout du bruit était sur les deux ensembles de points qui étaient formés d'un minimum de quatre à un maximum de 10 000 points. Les auteurs ont conclu que les quatre méthodes étaient similaires en terme de précision. Par exemple, pour un nombre de points égale à quatre, et un bruit de 0,01 d'écart type, la norme de l'erreur sur le vecteur de translation est d'environ  $10^{-2}$  unités et la norme de l'erreur sur la rotation est de l'ordre de  $10^{-2}$  unités pour les quatre méthodes.

Chèze et al [49], ont généré des trajectoires de trois marqueurs à partir de paramètres connus et ont rajouté un bruit sinusoïdal d'une amplitude maximale égale à 1 cm. Pour déterminer l'AHF à partir des points bruités, les auteurs ont utilisé la méthode SVD. D'après les résultats obtenus par les auteurs, pour avoir une erreur en orientation de l'axe, inférieure à 10 deg et une erreur en rotation inférieure à 4 deg il faut que l'amplitude de la rotation entre les deux positions soit supérieure à 22 deg ( $\theta \geq 22 \text{ deg}$ ). Pour avoir une erreur sur la translation de l'axe inférieure à 0,5 cm il faut que  $\theta \geq 2 \text{ deg}$  et pour avoir une erreur sur la position de l'axe inférieure à 0,5 cm il faut que  $\theta \geq 10 \text{ deg}$ .

Si les seuils sur l'amplitude de rotation sont assez élevés, c'est à cause de l'erreur introduite sur les trajectoires qui est trop importante. Il faut dire que le choix d'une aussi grande amplitude concernant le bruit ( $\pm 1 \text{ cm}$ ) se justifie par le fait qu'on ait rapporté dans la littérature un déplacement de plus de 2 cm entre les marqueurs attachés sur la peau d'un segment articulaire et l'os de celui-ci. Mais c'est une erreur qui peut être minimisée par l'emploi de support rigide comportant ces marqueurs.

Bottlang et al [50], ont utilisé des capteurs magnétiques pour suivre le mouvement d'un corps rigide dans l'espace et ont utilisé la méthode de Beggs [25] pour calculer l'AHF. Les capteurs magnétiques fournissent la position et l'orientation de l'objet sur lequel ils sont attachés, soit les paramètres  $(x_c, y_c, z_c, \alpha_c, \beta_c, \gamma_c)$ . Pour simuler des données issues de ce type de capteurs, les auteurs ont généré des points qu'ils ont transformé en leurs faisant subir une rotation  $\theta$  de (0,5, 1, 2, 4, 8, et 16 deg) autour et une translation de 10 mm le long d'un axe défini dans l'espace; puis ils ont rajouté séquentiellement (un à la fois) des erreurs de 0,25 mm et 0,1 deg sur les paramètres initiaux  $(x_c, y_c, z_c)$  et  $(\alpha_c, \beta_c, \gamma_c)$  respectivement. Les auteurs ont rapporté une erreur de 3,5 mm et de 0,7 deg sur la position et l'orientation de l'AHF respectivement, pour une amplitude d'angle de rotation de 8 deg. Les erreurs sur la translation et la rotation n'ont pas été rapportées.



Les auteurs n'ont rajouté du bruit que sur un seul ensemble de points, ce qui n'est pas fidèle à la réalité. En effet le bruit de mesure affecte l'ensemble des données et non pas une ou deux données de cet ensemble.

Dans la même optique, Duck et al [51] ont utilisé la méthode de Beggs [25] pour calculer l'AHF. Les auteurs ont validé cette méthode par une simulation similaire à celle de Bottlang et al [50], sauf que le bruit a été rajouté sur les deux ensembles de points et il était gaussien avec un écart type de 0,25 mm et 0,1 deg. Les auteurs ont rapporté des erreurs de  $2,33 \pm 1,72$  mm sur la position de l'AHF, de  $0,56 \pm 0,66$  deg sur l'orientation de l'AHF, de  $0,08 \pm 0,13$  mm sur la translation le long de l'AHF et de  $0,07 \pm 0,06$  deg sur l'angle de rotation autour de l'AHF et ce pour une amplitude de mouvement de 5 degrés de rotation.

Gupta et chutakanonta [38] ont comparé leur méthode avec la méthode de kinzel généralisée [37], en générant onze points à partir d'une matrice homogène connue et de onze points de départ ; ces derniers étaient à une distance  $\varepsilon$  d'un plan (pour un  $\varepsilon$  nul, les onze points sont coplanaires). Les auteurs trouvent que la méthode de Kinzel ne fonctionne plus à partir d'un  $\varepsilon$  égale à  $10^{-7}$  et que leur méthode fonctionne jusqu'à un  $\varepsilon$  égale à  $10^{-16}$  (précision de la machine). Un autre test, consistait à perturber aléatoirement les deux ensembles de points par un bruit de  $\pm 0,05$ . Les auteurs estiment la matrice homogène et extraient l'angle de rotation, la quantité de translation, l'orientation et la position de l'AHF et calculent une erreur relative sur ces paramètres. Les auteurs rapportent une erreur maximale de 59,25 % sur l'un des quatre paramètres (non spécifié) pour la méthode de Kinzel généralisée et une erreur maximale de 3,97 % sur l'un des quatre paramètres (non spécifié) pour la méthode qu'ils ont développée. Pour l'exemple donné par les auteurs, l'amplitude de rotation était de 98,42 deg.

## 2.5 Études comparatives pour l'AHI

Il n'y a pas beaucoup d'études comparatives concernant la détermination des paramètres de l'AHI. Cependant, on présente ce qu'on a trouvé dans la littérature et qui traite, soit de la comparaison des méthodes citées dans la section précédente, soit de leurs validations.

Laub et al [41], ont montré les limitations de l'approche vectorielle par rapport à leur méthode en donnant un exemple où les produits vectoriels et scalaires dans l'équation (2.83) tendent vers zéro.

Fenton et Willgoss [52], ont comparé cinq méthodes (Laub [41], Angeles [42], Algèbre vectorielle [52], une méthode basée sur la résolution d'un système d'équations [52], et une méthode basée sur des relations cinématique [52]) en terme de leurs robustesse (leurs aptitude à trouver la solution avec le moins de restriction sur la configuration des points ou de leurs vitesses) et de temps de calcul. Les auteurs concluent que la méthode d'Angeles [42] est la plus robuste mais la plus coûteuse en temps de calcul. En terme de précision toute les méthodes sont équivalentes, mais les données générées pour la comparaison (trajectoires et vitesses des points) étaient parfaites (absence de bruit) ce qui est loin de la réalité.

Sommer et Buczek [45], ont validé expérimentalement la méthode de Sommer. L'expérience consistait à calculer la vitesse angulaire d'un pendule tournant à une vitesse angulaire constante de 7,54 rad/s autour d'un axe fixe, à partir des trajectoires de quatre marqueurs (points) attachés sur ce pendule. Les trajectoires des quatre points mesurées à l'aide d'un système optoélectronique (SELSPOT) avec une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz, ont été filtrées et les vitesses linéaires des points, approximées par la méthode de la différence centrale. La valeur moyenne de la vitesse angulaire calculée était égale à 7,55 rad/s. Par contre on note une vitesse linéaire le long

de l'AHI variante autour de 60 mm/s. Ce qui correspond, d'après les auteurs à la précision de l'appareil de mesure qui était de 0,6 mm.

Sommer [46], a effectué une simulation Monté Carlo de 1000 itérations pour valider son algorithme. L'auteur a exploré l'effet du bruit de mesure, la distribution des points dans l'espace ainsi que leurs nombre sur la précision des résultats obtenus pour le calcul du vecteur vitesse angulaire. Les bruits affectant les trajectoires des points et leurs vitesses linéaires étaient gaussiens avec un écart type égale à 1% du rayon de distribution de ces points (distance quadratique moyenne des points par rapport à un axe passant par leur centroïde), et 1% de la vitesse maximale des points, respectivement. Le nombre de points utilisés pour la simulation variait entre 3 et 10. Les résultats obtenus par l'auteur étaient que l'erreur quadratique moyenne sur le vecteur vitesse angulaire était égale à 3% pour un nombre de points égale à 3, et que cette même erreur descendait à moins de 2% pour un nombre de points supérieure à 5.

Fioretti et al [53], ont généré un mouvement de rotation de trois marqueurs disposés sur les vertex d'un triangle solidaire au disque d'un cylindre de 100 mm de rayon. La vitesse de rotation du cylindre autour d'un axe sur le plan XZ et parallèle à l'axe Z du repère global, a été fixée à 0,098 rad/s. Les trajectoires ont été affectées par un bruit blanc de moyenne nulle et d'écart type de 0,5 mm. Les auteurs ont mis l'accent sur le traitement des données avant le calcul des paramètres de l'AHI par la méthode de Woltring. Ce traitement consistait à estimer les dérivées des trajectoires en utilisant une approche basée sur la représentation en variable d'état. Les erreurs obtenues par les auteurs étaient en moyenne de l'ordre de 1 % pour la vitesse angulaire, de l'ordre de  $10^{-3}$  mm/s pour la vitesse de translation le long de l'AHI, de l'ordre de  $10^{-2}$  deg pour l'orientation de l'AHI et finalement une erreur de localisation de l'AHI dans le plan XY de l'ordre du millimètre.

Les auteurs n'ont pas validé leur approche, pour une vitesse angulaire variable.

## 2.6 Conclusion

Dans les sections précédentes, nous avons décrits un ensemble d'algorithmes et présenté les différentes études comparatives qui ont été publiées dans la littérature. Ces études ne comprennent que quelques méthodes et ne les comparent que pour un ou deux paramètres.

À la lumière de ce qui a été présenté, l'objectif du présent travail est de comparer un ensemble représentatif des différentes méthodes sous différentes conditions simulant la réalité (données bruitées). Cette comparaison est effectuée sur les quatre paramètres calculés, en terme de précision.

Pour l'AHF, les paramètres vérifiés sont l'angle de rotation autour et la quantité de translation le long de l'axe, la position et l'orientation de l'axe par rapport à un repère de référence.

Pour l'AHI les paramètres comparés sont la vitesse angulaire autour de l'axe, la vitesse linéaire le long de l'axe, la position et l'orientation de cet axe. De plus les simulations tiennent compte d'une vitesse angulaire variable (vs constante) dans le temps.

Il est à noter que dans cette étude la comparaison des différentes méthodes est faite dans deux contextes; le premier est une simulation par ordinateur d'un mouvement d'un corps rigide et le deuxième est une validation expérimentale. L'impact du niveau du bruit affectant les trajectoires des marqueurs solidaires au corps rigide a été exploré, ainsi que l'effet du filtrage et du nombre de marqueurs utilisés pour le calcul des différents paramètres.

## **CHAPITRE 3**

### **MÉTHODOLOGIE**

#### **3.1 Introduction**

Dans ce chapitre, on présente le protocole suivi pour les deux parties qui consistent à comparer et à valider les différentes méthodes relatives à la détermination des paramètres de l'AHF et de l'AHl. La première partie est une comparaison par simulation. À partir d'une position initiale de marqueurs attachés sur un bras mécanique, on génère les trajectoires de ces marqueurs en imposant un certain profil de vitesse angulaire, faisant en sorte que le mouvement ressemble le plus à un mouvement d'un bras tournant autour d'un axe connu et fixe dans l'espace. La deuxième partie, est une validation expérimentale, qui consiste à suivre à l'aide d'un système d'analyse tridimensionnelle du mouvement (VICON 460) les trajectoires de marqueurs attachés à un bras mécanique en mouvement, et de mesurer la vitesse angulaire de ce bras à l'aide d'un capteur de vitesse angulaire (gyroscope triaxial), afin de comparer les vitesses angulaires estimées et mesurées.

#### **3.2 Choix des méthodes comparées**

Dans cette étude on n'a pas étudié et comparé toutes les méthodes présentées dans le chapitre 2. Les critères de sélection des méthodes étaient basés sur des études comparatives publiées dans la littérature et sur l'aptitude ou non d'une méthode à fonctionner avec au moins trois points. Ce dernier point est important, car en biomécanique, souvent on ne dispose que de trois marqueurs sur un segment articulaire. Notre choix s'est porté sur les méthodes suivantes :

- Pour l’AHF : algèbre géométrique (Beggs [25]), concept d’invariance (Angeles 1 [26]), algèbre linéaire (Laub [28]), quaternion unitaire (UQ [36]), quaternion dual (DQ [39]), décomposition polaire (Veld [31]), décomposition par valeurs singulières (SVD [32]) et approche linéaire (RT [40]).
- Pour l’AHI : concept d’invariance (Angeles 2 [43]), algèbre linéaire (Shiflett [44]), minimisation au sens des moindres carrées (Sommer [46]) et décomposition par valeurs singulières (Woltring [5]).

Les méthodes ont été implémentées et comparées à l’aide du logiciel Matlab de MathWorks.

Pour ne pas biaiser la comparaison, on a appliqué la même formule pour l’extraction de la position de l’AHF pour toutes les méthodes. Ainsi, pour la localisation de l’AHF, on a utilisé la méthode de Woltring [20] qui consiste à projeter le point milieu du segment reliant les deux centroides dans les deux positions du corps rigide, sur l’AHF.

### 3.3 Précision et sensibilité de l’axe hélicoïdal par la méthode de Simulation

Afin de simuler des données issues d’un système d’acquisition de mouvement, on a choisi un profil de vitesse angulaire qui représente une fonction continuellement dérivable. On a généré des trajectoires de marqueurs à partir d’une position initiale et du profil de la vitesse angulaire et finalement on a rajouté un bruit aléatoire gaussien de moyenne nulle et de variance variable. Dans les sections suivantes, on présente avec plus de détails les différentes étapes réalisées, afin d’obtenir des données en trois dimensions de marqueurs attachés à un corps rigide tournant autour d’un axe fixe avec une vitesse angulaire variable.

### 3.3.1 Profil de la vitesse angulaire

Pour générer un mouvement similaire à celui d'un segment articulaire, c'est-à-dire, commençant par une vitesse angulaire nulle pour atteindre un maximum pendant le mouvement et se terminant par une vitesse nulle, on a choisit un profil de vitesse angulaire réalisé à partir de la fonction exponentielle suivante [54] :

$$\|\omega(t)\| = \sqrt{\frac{\pi}{4}} m \exp(-m^2 (t - t_p)^2) \quad \text{rad/s} \quad (3.1)$$

Où  $t_p$  représente l'instant correspondant au pic de la vitesse angulaire (valeur maximale) et  $m$  est un scalaire qui contrôle la largeur et la valeur du pic de la vitesse angulaire, soit la rapidité et l'intensité du mouvement respectivement.

Connaissant la vitesse angulaire, l'angle de rotation est défini par l'intégral de cette dernière et est donné par la relation suivante :

$$\theta(t) = 45(1 + \text{erf}(m(t - t_p))) \quad \text{deg} \quad (3.2)$$

La fonction  $\text{erf}$  est une fonction erreur qui est définie par :

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (3.3)$$

La figure 6 montre un exemple de deux profils de vitesse angulaire ainsi que celui de l'angle de rotation pour deux différentes valeurs de  $m$ . La durée totale du mouvement est de deux secondes et la valeur maximale de la vitesse angulaire est atteinte à l'instant  $t_p$  correspondant à une seconde.

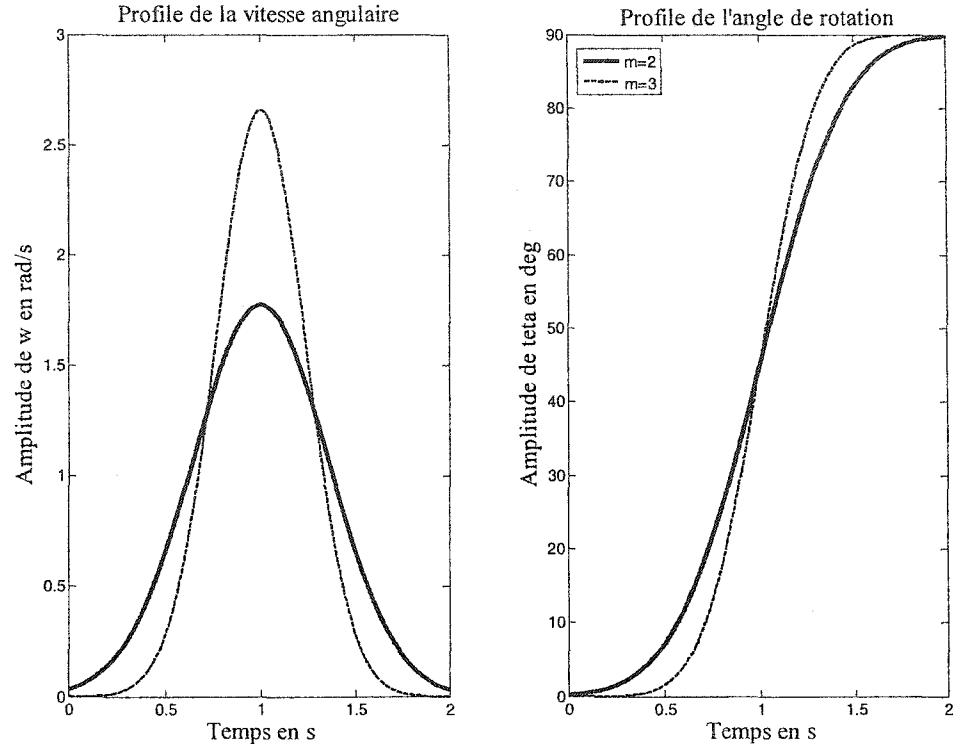


Figure 6 Profils de la vitesse angulaire en rad/s et de l'angle de rotation en degrés pour deux différentes valeurs de  $m$

### 3.3.2 Génération des trajectoires des marqueurs

Afin de générer les trajectoires des marqueurs, on a utilisé la méthode des quaternions. Connaissant le vecteur vitesse angulaire, on peut déterminer le quaternion unitaire associé à la rotation à partir de l'équation différentielle suivante :[55]

$$\frac{dq}{dt} = Q(t)q = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ -\omega_x & 0 & -\omega_z & \omega_y \\ -\omega_y & \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_z & -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$



La solution pour le quaternion unitaire  $q$  dans l'équation (3.4) pour une période d'échantillonnage  $\tau$  (assez faible pour supposer que la vitesse angulaire soit constante pendant cette période) est donnée par :[56]

$$q_{i+1} = e^{Q\tau} q_i$$

et

$$e^{Q\tau} = I \cos\left(\frac{\tau}{2}\|\omega\|\right) + \frac{2Q}{\|\omega\|} \sin\left(\frac{\tau}{2}\|\omega\|\right) \quad (3.5)$$

Dans notre cas, on a fixé  $\tau$  à  $100 \mu s$  (soit une fréquence d'échantillonnage de 10 Khz pour générer les trajectoires). Une fois le quaternion unitaire trouvé pour chaque instant, les trajectoires des marqueurs peuvent être générées par une simple multiplication. Si  $p_i$  est un point initial, son image  $p_{i+1}$  après rotation est donnée par :

$$p_{i+1} = q_i p_i \bar{q}_i \quad (3.6)$$

### 3.3.3 Ajout d'un bruit de mesure

Le bruit affectant les données mesurées peut être classé en deux catégories distinctes. La première catégorie est celle qui concerne les erreurs systématiques et qui sont difficiles à distinguer du signal utile du fait qu'elles occupent la même bande de fréquences que celui-ci. Un exemple répandu en biomécanique, est le déplacement des marqueurs dû au mouvement de la peau par rapport à l'os qui peut atteindre une amplitude de 2 cm [49]. L'effet de ce type d'erreurs peut être diminué, en prenant des précautions dans la préparation et la mise en œuvre des manipulations expérimentales.

La deuxième catégorie de bruit est celle qui modélise les perturbations apportées aux données de mesure. En général, on fait l'hypothèse que les bruits sur lesquels on ne dispose pas d'information particulière sont des bruits blancs, additifs, de distributions normales et de moyennes nulles. C'est un bruit qui se matérialise par des fluctuations autour des données mesurées, dues à la précision finie des appareils de mesure. La caractéristique principale de ce bruit est qu'il est blanc, c'est-à-dire que sa densité spectrale de puissance est constante et égale à la variance du signal étudié. Par conséquent la transformée de Fourier inverse de la densité spectrale (sa fonction d'autocorrélation) est une impulsion de Dirac à une normalisation près. Dans la partie simulation de notre étude comparative, on a généré un bruit gaussien de moyenne nulle et d'écart type variable de 0,1 mm, 0,25 mm, 1 mm, 2 mm et 10 mm, qui a été rajouté aux trajectoires des marqueurs, afin d'étudier la sensibilité des différentes méthodes au niveau du bruit affectant les données. Pour assurer une bonne réalisation de bruit aléatoire, notre simulation comportait 1000 itérations.

### **3.4 Validation expérimentale**

Pour valider expérimentalement les différentes méthodes étudiées, on a utilisé un bras mécanique sur lequel on a fixé des marqueurs réfléchissants dont les trajectoires sont mesurées par un système vidéo d'analyse du mouvement (VICON 460). Un gyroscope triaxial a été installé sur le bras pour mesurer la vitesse angulaire dans les trois dimensions.

#### **3.4.1 Dispositif mécanique**

On a généré un mouvement de rotation à l'aide d'un mécanisme constitué de deux cylindres (tubes) reliés par une articulation charnière (figure 7). Un des deux cylindres peut tourner autour d'un axe fixe. Cet axe est localisé en 3D dans un repère global (fixe),

par deux marqueurs attachés aux deux extrémités de la tige qui relie les deux tubes et qui représente l'axe de rotation du mécanisme.

Le mouvement du bras est enregistré en suivant les trajectoires des marqueurs placés sur les deux segments du mécanisme. Les coordonnées 3D de ces marqueurs seront mesurées par un système de vision (Vicon 460).

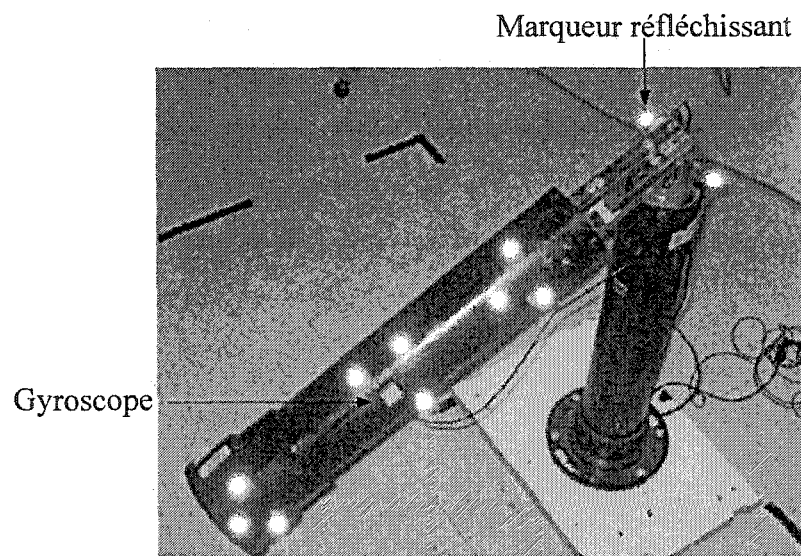


Figure 7 Dispositif mécanique utilisé pour valider les différentes méthodes

### 3.4.2 Système d'acquisition du mouvement

Le développement technologique permet de nos jours de faire des analyses de mouvement en trois dimensions. Pour notre étude, on dispose d'un système composé de six caméras et qui permet l'acquisition de données 3D, ainsi qu'un Gyroscope qui permet de mesurer la vitesse angulaire sur trois axes.

### 3.4.2.1 Système Vicon

Le système vidéo Vicon 460 dont nous disposons au sein de notre laboratoire de recherche en imagerie et orthopédie (L.I.O) est un système composé de six caméras. Ce système utilise des marqueurs sphériques réfléchissants qui peuvent être placés sur un objet en mouvement. Les six caméras émettent de la lumière rouge qui est réfléchiée par les marqueurs dans la même direction que la lumière incidente, puis captée par les caméras du système.

La reconstruction des coordonnées en trois dimensions des marqueurs, requiert l'extraction des coordonnées bidimensionnelles des projections de ces marqueurs dans les images prises par chaque caméra. Ces caméras sont disposées de manière à avoir des vues différentes. Les algorithmes de reconstruction sont basés sur le calcul de l'intersection des droites de vues associées à chaque image pour un point donné. Ce qui nécessite la connaissance des paramètres optiques de chaque caméra (longueur focale de la lentille, centre optique,...), ainsi que les positions relatives de chaque caméra par rapport aux autres et par rapport à un repère global commun. Ce dernier point nous amène à aborder les étapes de calibrage du système qui sont au nombre de deux et qui sont entièrement automatisées :

- Calibrage statique : Cette phase est rapide (le temps d'acquérir 20 échantillons), elle consiste à déposer dans le volume de capture une équerre et à enregistrer la position de quatre marqueurs situés sur cette équerre. La géométrie de l'équerre est identifiée par le système qui définit ainsi la position et l'orientation de son repère global.
- Calibrage dynamique : Cette phase est plus lente que la précédente (le temps pour avoir environ 2000 échantillons) et consiste en la capture du mouvement de trois marqueurs disposés sur une tige droite et dont les distances inter marqueurs

sont connues par le système. Cette phase permet de délimiter le volume de capture, et de déterminer les positions et orientations relatives de chaque caméra.

Les deux phases de calibrage peuvent être reprises séparément ou toutes les deux si les résultats ne sont pas satisfaisants. En effet, après calibrage le système nous permet d'avoir une première approximation de la précision des mesures. Cette précision dépend de plusieurs paramètres tel que le nombre et la disposition des caméras, la qualité du calibrage et le volume de capture. La précision est d'autant plus faible que le volume à couvrir par le système est grand.

Dans le cas de notre manipulation, la fréquence d'échantillonnage a été fixée à 60 Hz et la précision en statique (écart type sur les coordonnées mesurées d'un marqueurs en position statique) a été estimée à 0,03 mm.

#### **3.4.2.2 Système Physilog**

Pour mesurer la vitesse angulaire du segment en mouvement, on dispose d'un gyroscope piézoélectrique miniature, pouvant mesurer la vitesse angulaire suivant trois axes (triaxial). La fréquence d'échantillonnage a été fixée à 60 Hz pour ce système. Le signal fournit par les capteurs est amplifié et filtré par un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure de 17 Hz. Le gyroscope ainsi que le circuit conditionneur sont placés dans un petit boîtier d'environ  $21 \times 21 \times 12 \text{ mm}^3$ . Le tout est relié à un dispositif d'enregistrement portable (Physilog, BioAGM, Suisse). La vitesse angulaire est mesurée dans le repère local du capteur, et pour la représenter dans le repère global (Vicon) on a mis le gyroscope sur un support rigide composé de trois marqueurs réfléchissants ( $m_1, m_2$  et  $m_3$ ), tel qu'illustré par la figure 8.

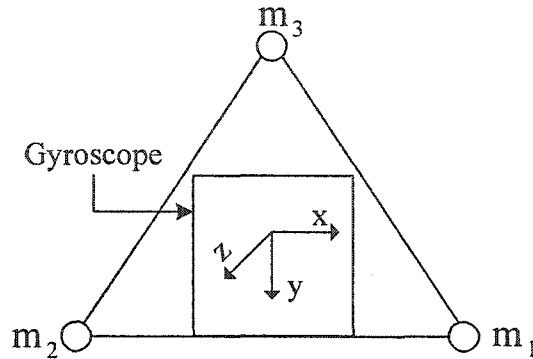


Figure 8 Support du Gyroscope donnant son orientation par rapport au repère global (Vicon)

La première étape consiste à aligner les deux marqueurs  $m_1$  et  $m_2$  suivant l'axe X du capteur par exemple (alignement mécanique). De cette manière le repère technique (conçu à partir des marqueurs) peut être construit en ayant comme origine le marqueur  $m_1$ . Si on note les vecteurs positions des trois marqueurs par  $m_1, m_2$  et  $m_3$ , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 m_1 m_2 &= m_2 - m_1; \\
 m_1 m_3 &= m_3 - m_1; \\
 i &= \frac{m_1 m_2}{\|m_1 m_2\|}; \\
 k &= m_1 m_3 \times m_1 m_2; \\
 k &= \frac{k}{\|k\|}; \\
 j &= i \times k;
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ainsi on obtient une matrice  $R$  de dimension  $3 \times 3$ , représentant l'orientation du repère technique par rapport au repère global, les colonnes de cette matrice sont les vecteurs ( $i$ ,

$j$  et  $k$ ) obtenus par (3.7). La transformation du signal du capteur  $\omega_{\text{capteur}}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  dans le repère global  $\omega_{\text{capteur}}^{RG}$  est donnée par la relation suivante :

$$\omega_{\text{capteur}}^{RG} = R \omega_{\text{capteur}} \quad (3.8)$$

Les données ainsi obtenues par les deux systèmes d'acquisition sont entachées d'erreurs. Ces dernières peuvent être réduites par des opérations de filtrage. Dans la section suivante, on présente une technique de filtrage utilisée dans le domaine de la biomécanique.

### 3.5 Filtrage

L'étape de filtrage des données est nécessaire dans toutes les applications qui font appel à des données mesurées. En biomécanique, du fait de l'utilisation des trajectoires et des dérivées de celles-ci (vitesses et accélérations linéaires) le filtrage devient une étape inévitable. Pour souligner l'importance du filtrage, prenant le cas d'un signal mesuré (bruité)  $y_m(t)$  constitué du signal utile  $y(t)$  et d'un bruit  $b(t)$  tel que :

$$y_m(t) = y(t) + b(t) \quad (3.9)$$

En supposant que le bruit soit un signal sinusoïdal de haute fréquence  $b(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi)$ , la dérivée première du signal  $y_m(t)$  est donnée par :

$$\frac{dy_m(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} + b'(t) \quad (3.10)$$

$$b'(t) = 2\pi f A \sin(2\pi f t + \varphi)$$

On remarque que l'amplitude du bruit au niveau de la première dérivée (vitesse linéaire) a été amplifiée d'un facteur  $2\pi f$ . Ce bruit serait amplifié d'un facteur de  $(2\pi f)^2$  pour la deuxième dérivée (accélération linéaire).

Différentes techniques de filtrage ont été développées et présentées dans la littérature, Wood [57] a classé des techniques de lissage et de filtrage des données dans le domaine temporel et fréquentiel et qui permettent d'obtenir de meilleures estimations des dérivées du signal original (bruité) comme suit :

- Les méthodes graphiques,
- Les techniques de différence finie,
- Approximation par des polynômes,
- Approximation par splines,
- Filtres digitaux,
- Analyse de Fourier.

À ces techniques on peut rajouté les méthodes basées sur la représentation temps fréquence telles les transformées de Wigner Ville [58] et les ondelettes [59], ou encore les méthodes basées sur l'analyse du spectre singulier (SSA) [60].

Différentes études comparatives [58, 61-63] de techniques de filtrage ont montré qu'il n'existait pas une méthode qui se distinguait des autres par sa supériorité. Notre choix s'est porté sur une méthode basée sur le filtrage numérique, et plus précisément sur le filtre passe-bas d'ordre deux de Butterworth. Ce filtre appliqué à un signal cause un déphasage du signal original. Pour y remédier le signal est filtré une deuxième fois dans un ordre inversé de ses échantillons, tel qu'illustré sur la figure 9.



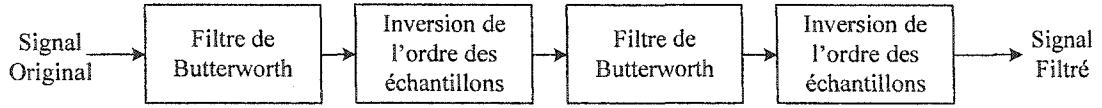


Figure 9 Élimination du décalage de phase du filtre de Butterworth

Pour fixer la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre, les chercheurs s'entendent pour dire qu'une méthode automatique, qui ne dépendrait pas de l'expérimentateur et de son appréciation est préférable. Winter [64], a développé une méthode semi-automatique pour déterminer la fréquence de coupure  $f_c$  à partir de l'analyse des résidus calculés pour différentes valeurs de celle-ci. Pour une gamme de fréquences allant de 0 Hz jusqu'à la fréquence d'échantillonnage divisée par deux (fréquence de Nyquist :  $f_s/2$ ), la méthode consiste à calculer l'erreur quadratique moyenne (ERMS) entre le signal mesuré  $y_m(t)$  et le signal filtré  $y_f(t)$ . Cette erreur est définie pour  $N$  échantillons par :

$$ERMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_m(i) - y_f(i))^2} \quad (3.11)$$

L'étape suivante est de tracer la courbe de cette erreur en fonction des fréquences de coupure pour finalement passer une droite par régression linéaire, afin de calculer la fréquence optimale. Le problème qu'on a rencontré pour rendre cette méthode complètement automatique, est le fait de la sensibilité du résultat quant au choix du nombre de points et de la région choisie pour la régression linéaire.

Pour cette raison, dans notre étude on a utilisé une autre approche [63, 65], qui consiste à faire une analyse de la fonction d'autocorrélation des résidus (différence entre le signal original et le signal filtré) en fonction de la fréquence de coupure. En supposant que le bruit affectant les données soit un bruit blanc, la méthode consiste à choisir la fréquence

de coupure pour laquelle la fonction d'autocorrélation des résidus se rapproche le plus de celle d'un bruit blanc, c'est-à-dire une impulsion de Dirac.

L'algorithme se présente comme suit :

1) Pour chaque fréquence de coupure ( $f_c$ ) allant de 0 à  $f_s/2$  :

- Calculer la fonction d'autocorrélation des résidus par la relation suivante :

$$R_{ss}(L) = \frac{1}{n-L} \sum_{i=1}^{n-L} S_i S_{i+L} \quad L = 0, 1, \dots, n-1$$

$$S_i = y_m(i) - y_f(i)$$
(3.12)

- Calculer la fonction coût ( $Fc$ ), qui représente la somme des carrés des dix premiers coefficients de la fonction d'autocorrélation, définie par :

$$Fc = \sum_{L=1}^{10} R_{ss}(L)^2$$
(3.13)

Pour un bruit blanc parfait, la fonction coût devrait être égale à zéro, car celle-ci, par définition est nulle pour tous retards différent de zéro ( $L \neq 0$ ).

2) Tracer la courbe de la fonction coût en fonction de la fréquence de coupure. La fréquence de coupure optimale correspond au minimum de la fonction coût, tel qu'illustrer sur la figure 10.

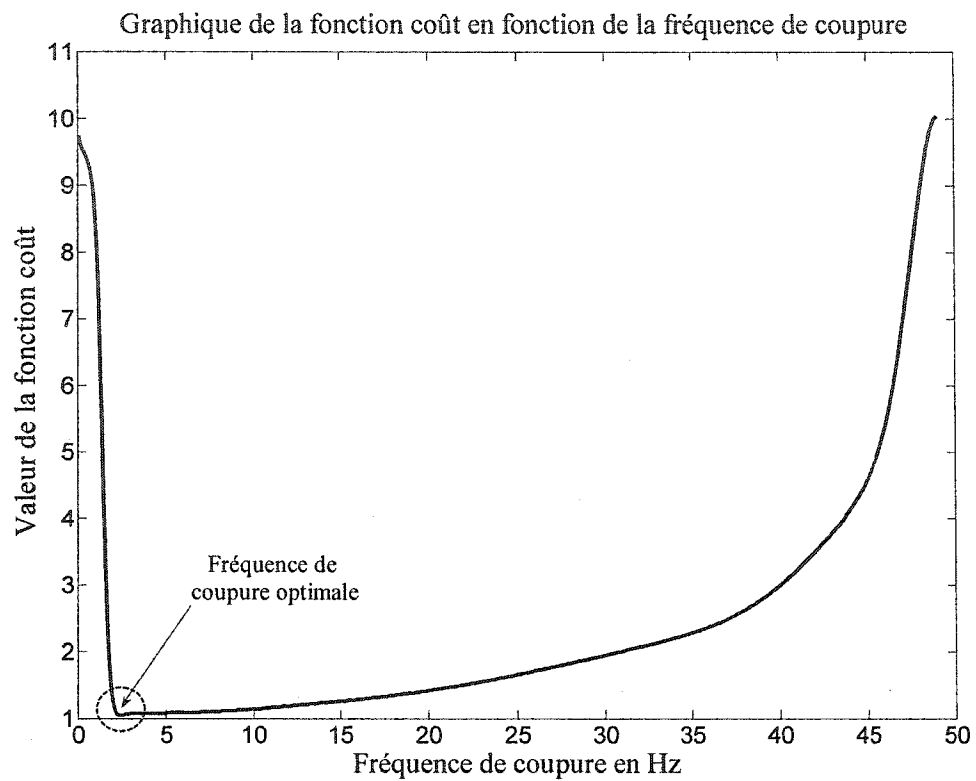


Figure 10 Détermination de la fréquence de coupure par la méthode d'autocorrélation (exemple)

Cette méthode peut être résumée par l'organigramme de la figure 11.

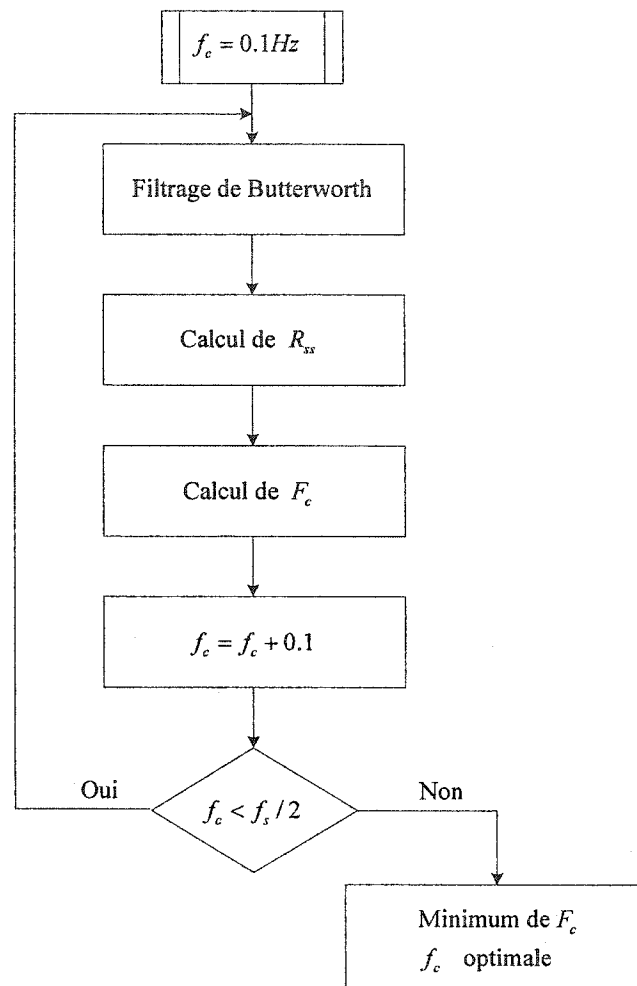


Figure 11 Organigramme de la méthode de filtrage

### 3.6 Paramètres comparés

Afin d'évaluer la précision de chaque méthode d'estimation des paramètres de l'AHF on a comparé les paramètres suivant : (voir la figure 12))

- L'erreur en position de l'axe (ErPos) qui représente la distance la plus courte entre l'axe estimé et l'axe réel.
- L'erreur en orientation (ErOri) qui représente l'angle formé par les vecteurs orientation de l'AHF estimé et réel.
- L'erreur sur l'amplitude de l'angle de rotation autour de l'AHF (ErRot), qui est définie par la valeur absolue de la différence entre les angles de rotation estimé et réel ( $\theta_e$  et  $\theta_r$ ).
- L'erreur sur la translation le long de l'AHF (ErTra), qui est définie par la valeur absolue de la différence entre les amplitudes de translation estimée et réelle ( $u_e$  et  $u_r$ ).

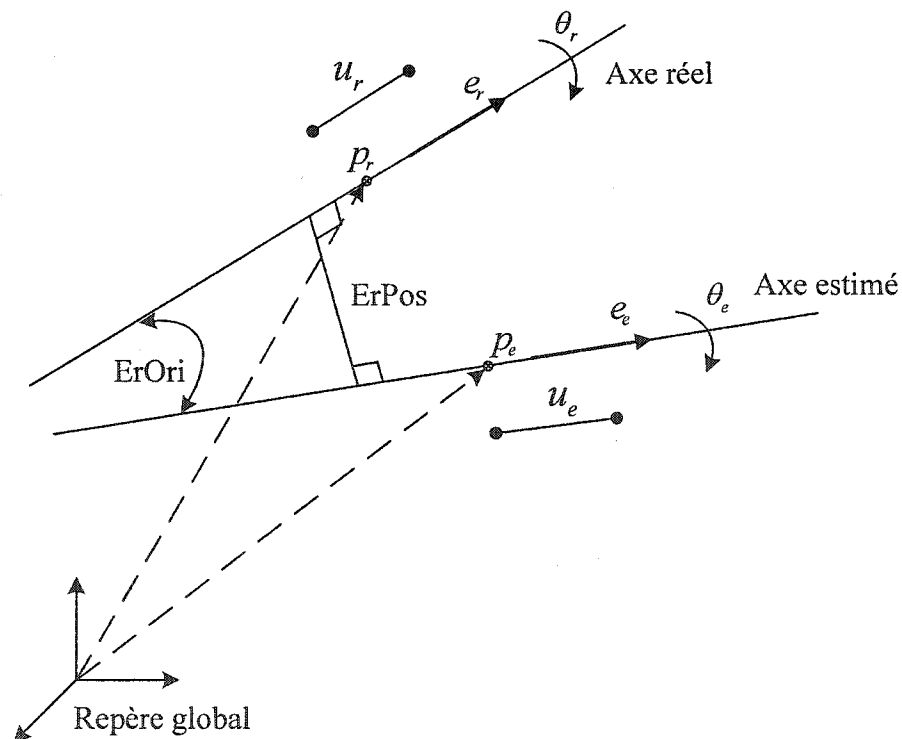


Figure 12 Erreur en position et en orientation de l'axe estimé

En ce qui concerne les paramètres de l'AHI, les mêmes paramètres que ceux de l'AHF ont été comparés, sauf qu'au lieu de parler d'amplitude de rotation et de translation, c'est de vitesse de rotation et de vitesse linéaire de translation qu'il s'agit. Si on note par  $e_e$  et  $p_e$  les vecteurs orientation et position de l'axe estimé et par  $e_r$  et  $p_r$  ceux de l'axe réel, on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 ErPos &= \left| \frac{(e_r \times e_e) \llcorner (p_r - p_e)}{\|e_r \times e_e\|} \right| \\
 ErOri &= \cos^{-1}(e_r \llcorner e_e) \\
 ErRot &= |\theta_r - \theta_e| \\
 ErTra &= |u_r - u_e|
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

### 3.7 Modélisation des erreurs d'estimation de l'axe hélicoïdal

Woltring et al [20] ont développé des modèles pour approximer les variances des paramètres estimés de l'AHF pour des distributions de marqueurs et de bruit isotropiques. Ces modèles ont été validés par Spoor [66] en effectuant une simulation Monté Carlo. De Lange et al [67] ont trouvé que ces mêmes modèles étaient valables pour approximer les erreurs dans le cas de distributions non isotropiques.

Ces variances sont :  $\sigma_\theta^2$  pour l'angle de rotation autour de l'axe,  $\sigma_e^2$  pour l'orientation de l'axe,  $\sigma_u^2$  pour la quantité de translation le long de l'axe et  $\sigma_p^2$  pour la position de l'axe. Les formules estimant ces variances sont données par Spoor [66] :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^2 &= \frac{2\sigma^2}{m\rho^2} \\
\sigma_e^2 &= \frac{2\sigma^2}{m\rho^2 \sin^2(\theta/2)} \\
\sigma_u^2 &= \frac{2\sigma^2}{m} \left(1 + \frac{N^2}{\rho^2}\right) \\
\sigma_p^2 &= \frac{\sigma^2}{m \sin^2(\theta/2)} \left(1 + \frac{N^2}{2\rho^2} + \frac{u^2}{4\rho^2 \tan^2(\theta/2)}\right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Avec les définitions suivantes :

$\sigma$  : L'écart type de l'erreur sur les coordonnées des marqueurs.

$m$  : Le nombre de marqueurs.

$\rho$  : Le rayon de distribution des marqueurs par rapport à un axe passant par leur centroïde, définit par :  $\rho^2 = \frac{2}{3}r^2$ , avec  $r$ , la distance quadratique moyenne des

marqueurs par rapport à leur centroïde définie par  $\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (p_{(i)} - \bar{p}_{(i)})^T (p_{(i)} - \bar{p}_{(i)})\right)^{1/2}$ .

$N$  : Une quantité définie par  $\frac{\|p - p_0\|}{\cos(\theta/2)}$ , où  $p$  est la position du point milieu du segment reliant les centroïdes avant et après déplacement, et  $p_0$  est sa projection sur l'AHF.

$u$  : La quantité de translation le long de l'AHF.

Dans Woltring et al [5], les auteurs ont donné les formules correspondants aux variances des paramètres de l'AHF estimé, en substituant  $\theta$  par  $\omega\tau$  et  $u$  par  $\dot{u}\tau$  dans les équations (3.15) pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\omega}^2 &= \frac{2\sigma^2}{m\rho^2\tau^2} \\
\sigma_e^2 &= \frac{2\sigma_{\omega}^2}{\omega^2} \\
\sigma_u^2 &= \frac{2\sigma^2}{m} \left(1 + \frac{\|p - p_0\|^2}{\rho^2}\right) \\
\sigma_p^2 &= \frac{\sigma^2}{m\omega^2\tau^2} \left(4 + 4\frac{\dot{u}^2}{\omega^2\rho^2} + 2\frac{\|p - p_0\|^2}{\rho^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Les formules développées pour l’AHF et l’AHI restent valables pour des paramètres estimés après le filtrage des trajectoires des marqueurs, en remplaçant la variance des données de mesure  $\sigma^2$  par son équivalent après filtrage passe bas  $\sigma_{\min}^2$  donnée par la relation suivante [5, 47] :

$$\sigma_{\min}^2 = \frac{\sigma^2 \tau \omega_0}{\pi} \tag{3.17}$$

Où  $\tau$  représente la période d’échantillonnage,  $\omega_0$  la bande de fréquence du signal exprimée en rad/s. Si on considère que le contenu spectral est de l’ordre de 6Hz pour des mouvements humain typiques [64, 68], alors l’équation (3.17) devient :

$$\sigma_{\min}^2 = 12\sigma^2 \tau \tag{3.18}$$

### 3.8 Distribution des marqueurs

Bien que dans cette étude la distribution des marqueurs dans l’espace n’a pas été modifiée, on présente cependant les différents indices existant dans la littérature et qui caractérisent cette distribution.



Woltring et al [20], ont caractérisé la distribution des marqueurs par deux indices :  $\rho$  qui est le rayon de distribution des marqueurs par rapport à un axe passant par leur centroïde, définit par :

$$\rho^2 = \frac{2}{3} r^2 \quad (3.19)$$

$r$  : est la racine carrée de la distance quadratique moyenne des marqueurs par rapport à leur centroïde définie par :

$$r = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (p_{(i)} - \bar{p}_{(i)})^T (p_{(i)} - \bar{p}_{(i)}) \right)^{1/2} \quad (3.20)$$

Soderkvist et al [69], ont présenté un indice défini par :

$$k_A = (\sigma_{m-1}^2 + \sigma_m^2)^{-1/2} \quad (3.21)$$

Où les  $\sigma_i$  sont les deux plus petites valeurs singulières de la matrice composée des coordonnées des marqueurs dans la première position centrés autour de leurs centroïde.

Cappozzo et al [70], ont présenté trois indices,  $r$ ,  $d$  et  $a$  à partir de la matrice des marqueurs centrés autour de leurs centroïde, dans la première position  $P'_1$ . L'indice  $r$  est défini tel que précédemment et est exprimé en fonction de  $P'_1$  par :

$$r = \sqrt{\text{trace}(K)} \quad (3.22)$$

$$K = \frac{P'_1 P_1'^T}{m}$$

Les indices  $d$  et  $a$  sont les indices d'isotropie 3D et 2D respectivement. Ils sont définis par :

$$d = 3 \frac{k_{\min}}{k_{\min} + k_{\text{mid}} + k_{\max}} \quad (3.23)$$

$$a = 2 \frac{k_{\text{mid}}}{k_{\text{mid}} + k_{\max}}$$

Les  $k_{\min}$ ,  $k_{\text{mid}}$  et  $k_{\max}$  sont les éléments de la diagonale de la matrice  $K$  diagonalisée (les valeurs propres de  $K$ ), tel que  $k_{\min} < k_{\text{mid}} < k_{\max}$ .

Dans le cas de notre étude la distribution des marqueurs dans le cas de la simulation est donnée par le tableau suivant :

Tableau II

Indices donnant la distribution des marqueurs dans le cas de la simulation

$m$		3	4	5	6	7	8	9
Woltring	$\rho$ (mm)	45,41	52,45	72,60	76,09	84,86	93,74	111,29
	$r$ (mm)	55,62	64,24	88,92	93,19	103,94	114,80	136,30
Cappozzo	$r$ (mm)	55,62	64,24	88,92	93,19	103,94	114,80	136,30
	$d$	0,000	0,007	0,005	0,005	0,006	0,005	0,008
	$a$	0,491	0,340	0,145	0,179	0,124	0,119	0,082
Soderkvist	$k_A$ (1/mm)	0,021	0,019	0,018	0,015	0,014	0,012	0,012

La distribution des marqueurs dans le cas expérimental est donnée par le tableau suivant :

Tableau III

Indices donnant la distribution des marqueurs dans le cas expérimental

	$m$	3	4	5	6	7	8	9
Woltring	$\rho$ (mm)	19,39	134,07	151,47	158,12	147,90	138,51	132,91
	$r$ (mm)	23,74	164,36	185,47	193,53	181,01	169,52	162,79
Cappozzo	$r$ (mm)	23,74	164,36	185,47	193,53	181,01	169,52	162,79
	$d$ ( $10^{-4}$ )	0	2,30	1,69	2,83	3,68	3,67	4,70
	$a$	0,767	0,019	0,024	0,018	0,047	0,047	0,067
Soderkvist	$k_A$ (1/mm)	0,039	0,031	0,022	0,022	0,014	0,014	0,011

### 3.9 Approximation de l'AHI à partir de l'AHF

Une fois les paramètres ( $e$ ,  $\theta$ ,  $u$ ,  $p_0$ ) de l'AHF, estimés, sa contrepartie l'AHI peut être approximé par différence centrale, comme suit :

$$\|\omega(i)\| = \frac{\theta(i+1) - \theta(i-1)}{2\tau} \quad (3.24)$$

$$\omega(i) = \|\omega(i)\| e(i)$$

$$\dot{u}(i) = \frac{u(i+1) - u(i-1)}{2\tau} \quad (3.25)$$

Dans les sections précédentes, on a décrit les différentes étapes qui nous ont permis de créer des données similaires à celles acquises par un système de mesure du mouvement. On a comparé toutes les méthodes sur la base de ces données, et on a effectué une manipulation expérimentale qui nous a permis de valider ces différentes méthodes.

On a également décrit les modèles de variance des paramètres estimés en fonction de la précision des appareils de mesure, du nombre de marqueurs et de leur distribution.

Il faut rappeler les limites du processus de génération des données (simulation et expérimentation) qui tient compte de mouvements d'un segment articulaire autour d'un axe fixe (articulation charnière).

## **CHAPITRE 4**

### **RÉSULTATS**

#### **4.1 Introduction**

Dans ce chapitre, on présente les résultats obtenus pour la comparaison des différentes méthodes relatives à l'estimation des paramètres de l'AHF et de l'AHI. Pour l'AHF, ces méthodes sont au nombre de huit et sont : Angeles 1, Beggs, Laub, DQ, UQ, SVD, RT et Veld. Pour l'AHI, ces méthodes sont au nombre de quatre et sont : Angeles 2, Shiflett, Woltring et Sommer.

Dans un premier temps, les résultats de la comparaison dans un contexte idéal (sans bruit de mesure) sont présentés. En suite la comparaison est effectuée avec des données affectées d'un bruit gaussien de différents niveaux (écarts type). Finalement la comparaison est mise en œuvre dans un cas de données réelles (expérimental).

Dans cette étude, on a évalué l'influence du filtrage des trajectoires sur la qualité de l'estimation de l'AHF et de l'AHI. Aussi, on a étudié l'effet du nombre de marqueurs utilisés sur cette estimation et la possibilité d'approximer l'AHI par l'AHF.

#### **4.2 Résultats de la simulation sans bruit**

Les résultats sont présentés pour un mouvement d'une durée de deux secondes et d'une vitesse angulaire maximale de 1,8 rad/s. Ce mouvement est échantillonné à 100 Hz (à l'origine obtenu à partir d'un signal généré à 10 KHz). Les trajectoires de trois marqueurs ont été prises pour estimer l'AHF pour les huit méthodes.

#### 4.2.1 Résultats obtenus pour l'AHF sans bruit

En premier lieu, on présente la justification de remplacer les différentes manières de localiser l'AHF pour les méthodes Angeles 1, Beggs, DQ et Veld (tel que présenté dans le chapitre 2), par la méthode de Woltring et qui consiste à projeter le point milieu du segment reliant les deux centroides des points avant et après déplacement du corps rigide. Les résultats obtenus pour les quatre méthodes originales versus après la modification sont comme suit :

L'erreur moyenne sur la position pour la méthode Angeles 1 en appliquant la méthode de localisation de l'AHF d'Angeles est égale à 1,21 mm, cette même erreur passe à 0,01 mm en appliquant la méthode de localisation de Woltring. Pour la méthode Beggs cette erreur passe de 0,29 mm à 0,01 mm. Pour la méthode DQ cette erreur passe de 0,01 mm à  $10^{-4}$  mm. Finalement pour la méthode Veld, cette erreur est de 1,21 mm et passe à 0,01 mm avec la méthode de localisation de Woltring.

En apportant cette modification et en comparant les huit méthodes on trouve les résultats suivant :

L'erreur moyenne sur la position de l'AHF est presque du même ordre de grandeur, soit de  $10^{-2}$  mm pour les huit méthodes, sauf pour la méthode DQ où cette erreur est de l'ordre de  $10^{-4}$  mm. En ce qui concerne les erreurs moyennes sur l'orientation de l'AHF et la rotation autour de celui-ci, elles sont de l'ordre de  $10^{-3}$  deg et  $10^{-7}$  deg respectivement pour les huit méthodes. L'erreur moyenne sur la quantité de translation le long de l'AHF est de l'ordre de  $10^{-10}$  mm pour la méthode DQ et de l'ordre de  $10^{-12}$  mm pour les autres méthodes.

#### 4.2.2 Résultats obtenus pour l'AHI sans bruit

Pour l'AHI, les mêmes données utilisées pour l'AHF ont été reprises. Les vitesses linéaires des marqueurs ont été calculées à partir de leurs trajectoires en utilisant la méthode de la différence centrale. Les erreurs sont calculées sur un demi lob de la vitesse angulaire normalisée ( $\|\omega\|/\|\omega_{\max}\|$ ).

D'après les résultats obtenus, l'erreur moyenne sur la position de l'AHI est de l'ordre de  $10^{-2}$  mm pour les quatre méthodes, l'erreur sur l'orientation de l'AHI est de l'ordre de  $10^{-6}$  deg pour la méthode de Woltring et de  $10^{-4}$  deg pour les autres méthodes. L'erreur sur la vitesse angulaire est de l'ordre de  $10^{-4}$  rad/s pour les quatre méthodes. L'erreur sur la vitesse de translation est de l'ordre de  $10^{-10}$  mm/s pour la méthode de Woltring, et de l'ordre du  $10^{-5}$  mm/s pour les autres méthodes.

### 4.3 Résultats de la simulation avec bruit

Pour évaluer la sensibilité des différentes méthodes au bruit de mesure, on a injecté un bruit gaussien de moyenne nulle avec des écarts type variables de 0,1 - 0,25 - 1 - 2 et 10 mm. Les résultats présentés sont le fruit d'une simulation Monte Carlo de mille itérations.

#### 4.3.1 Résultats obtenus pour l'AHF avec bruit

On peut voir l'évolution des erreurs en fonction du niveau du bruit injecté. La figure 13 illustre cette évolution pour la méthode DQ, sans filtrage des données générées avec une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz. Chaque point sur le graphique représente une moyenne sur 1000 résultats. L'AHF a été estimé à partir de trois marqueurs.

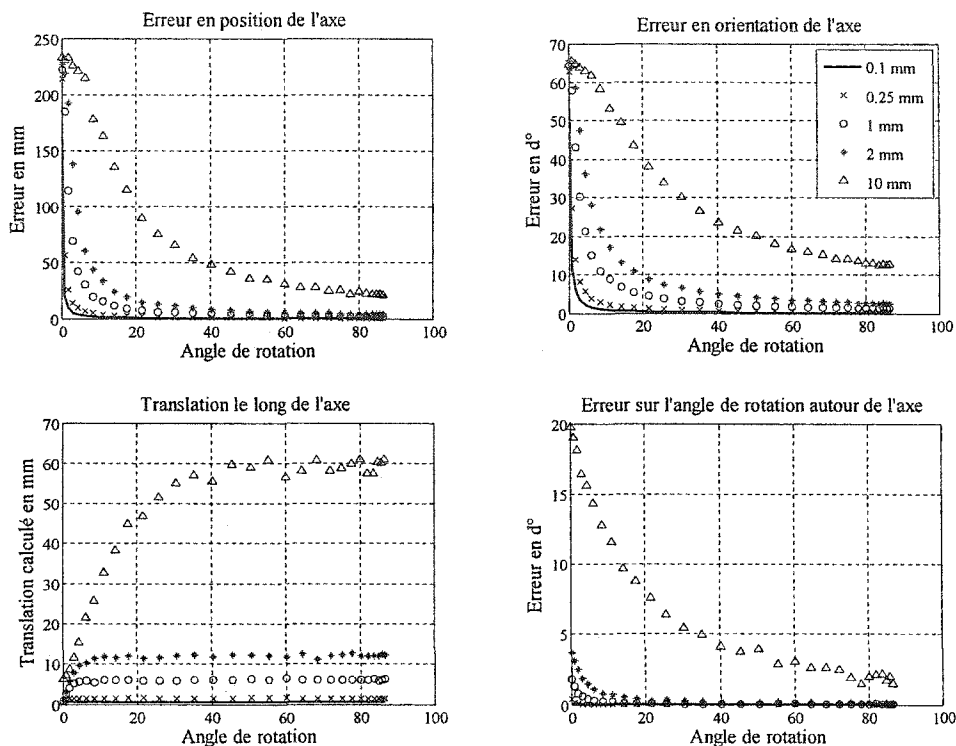


Figure 13 Évolution des moyennes des erreurs d'estimation de l'AHF par la méthode DQ en fonction du niveau de bruit affectant les trajectoires de trois points

Les courbes obtenues pour les autres méthodes ont une allure similaire à celle de la figure 13. Les erreurs d'estimation de l'AHF sont proportionnelles au niveau du bruit injecté.

On peut aussi voir l'évolution des différents paramètres, pour une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz et un bruit de 1 mm d'écart type et des trajectoires filtrées de trois marqueurs. La figure 14 et la figure 15 illustrent cette évolution pour l'erreur sur la position de l'AHF et l'erreur sur l'orientation de l'AHF, respectivement.

L'affichage des paramètres sur une échelle logarithmique permet de distinguer les différences entre les méthodes comparées.



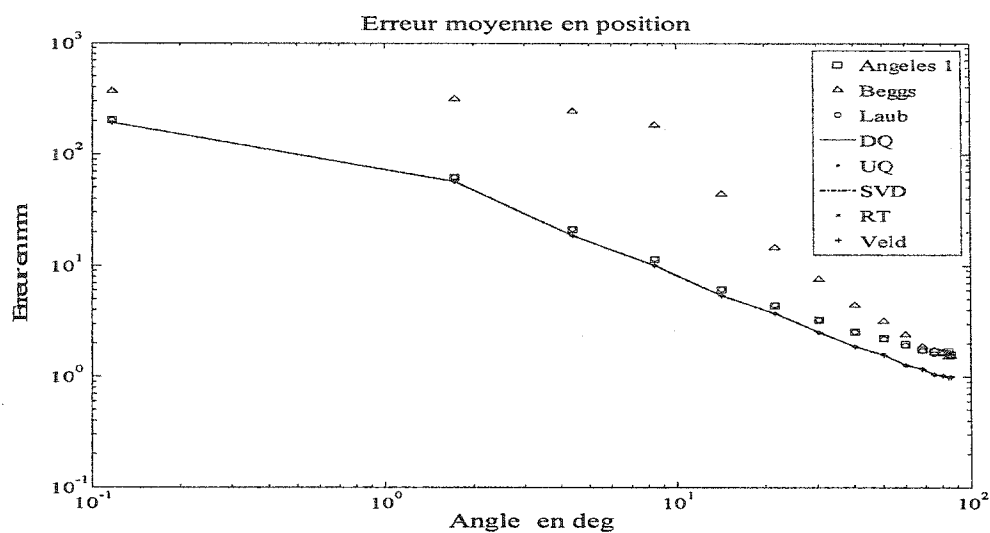


Figure 14 Moyenne de l'erreur sur la position de l'AHF pour les huit méthodes pour un bruit de 1mm

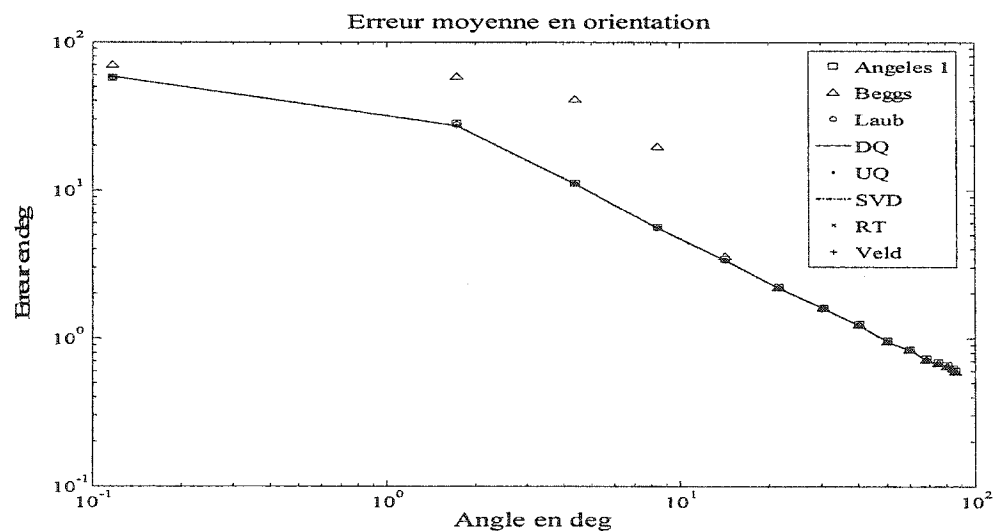


Figure 15 Moyenne de l'erreur sur l'orientation de l'AHF pour les huit méthodes pour un bruit de 1mm

La figure 16 et la figure 17 montrent l'erreur moyenne sur la translation et la rotation estimées le long et autour de l'AHF, respectivement.

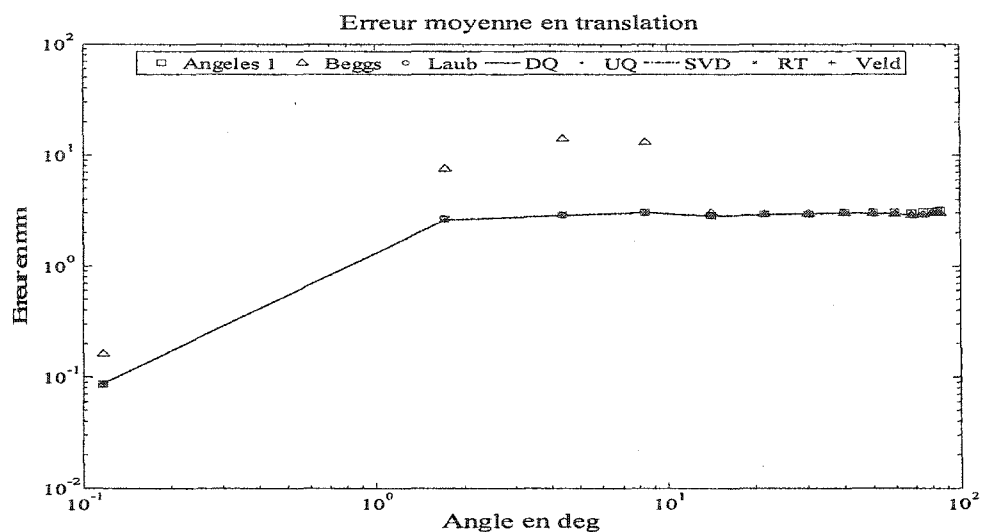


Figure 16 Moyenne de l'erreur sur la translation le long de l'AHF pour les huit méthodes pour un bruit de 1mm

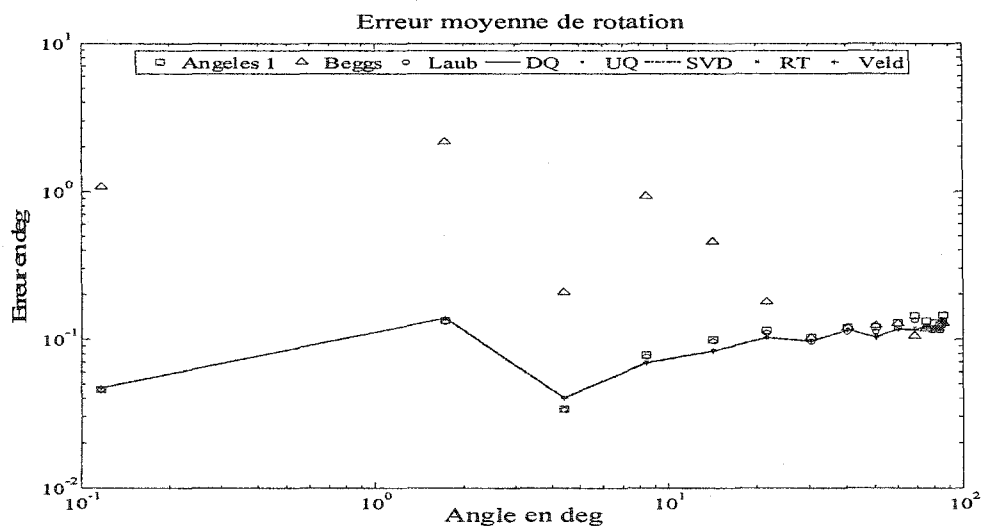


Figure 17 Moyenne de l'erreur sur la rotation autour de l'AHF pour les huit méthodes pour un bruit de 1mm

Ces erreurs ont été regroupées en fonction de l'amplitude du mouvement ( $\theta = 1-2-3-4-5-10-20-30-40-50-60-70-80$  deg) et du niveau de bruit ( $\sigma = 0,1-0,25-1-2-10$  mm) et sont présentées sous forme de tableaux en annexe.

L'effet du filtrage est illustré pour un bruit de 1 mm. Le Tableau IV regroupe les différentes moyennes d'erreurs avant et après filtrage des trajectoires pour une amplitude de rotation comprise entre 10 et 20 degrés.

Tableau IV

Erreurs sur l'estimation des paramètres de l'AHF en mm et en degrés avec un bruit de 1 mm et pour une amplitude de rotation entre 10 et 20 degrés, avant (nF) et après (F) filtrage

	Angeles 1	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
ErPos (nF)	13,282	119,372	13,458	11,583	11,583	11,583	11,579	11,583
ErPos (F)	6,229	47,568	6,228	5,346	5,346	5,346	5,346	5,346
ErOri (nF)	7,270	6,807	6,723	6,714	6,714	6,714	6,714	6,714
ErOri (F)	3,298	4,292	3,264	3,259	3,259	3,259	3,259	3,259
ErTra (nF)	6,203	6,043	5,995	5,985	5,985	5,985	5,985	5,985
ErTra (F)	2,894	3,859	2,877	2,871	2,871	2,871	2,871	2,871
ErRot (nF)	0,135	0,411	0,134	0,131	0,131	0,131	0,128	0,131
ErRot (F)	0,098	0,437	0,095	0,086	0,086	0,086	0,087	0,086

D'autre part, on a évalué l'influence du nombre de marqueurs sur les performances des méthodes qui peuvent prendre en considération plus de trois marqueurs. Les seules méthodes qui n'ont pas pue être comparées pour cette raison, sont les méthodes Angeles 1, Beggs et Laub. La figure 18 et la figure 19 illustrent l'évolution de la moyenne des erreurs d'estimation des paramètres de l'AHF en fonction du nombre de marqueurs, pour un bruit de 0,1 mm, une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz et une amplitude de rotation entre 1 et 2 deg. Les courbes obtenues pour le reste des intervalles d'amplitude de rotation ont des allures similaires. Pour les cinq méthodes (DQ, UQ, SVD, RT et Veld), l'amplitude de l'erreur sur la position de l'AHF est inversement proportionnelle au nombre de marqueurs, cette erreur passe de 7,42 mm pour trois

marqueurs à 1,35 mm pour neuf marqueurs. L'erreur sur l'orientation de l'AHF et sur la quantité de translation le long de celui-ci, passent de 4,66 deg et 0,43 mm pour trois marqueurs à 2,07 deg et 0,06 mm pour neuf marqueurs, respectivement. En ce qui concerne l'erreur sur la rotation autour de l'AHF, celle-ci est constante et ne dépend pas du nombre de marqueurs. Elle varie autour de 0,04 deg, ce qui est négligeable.

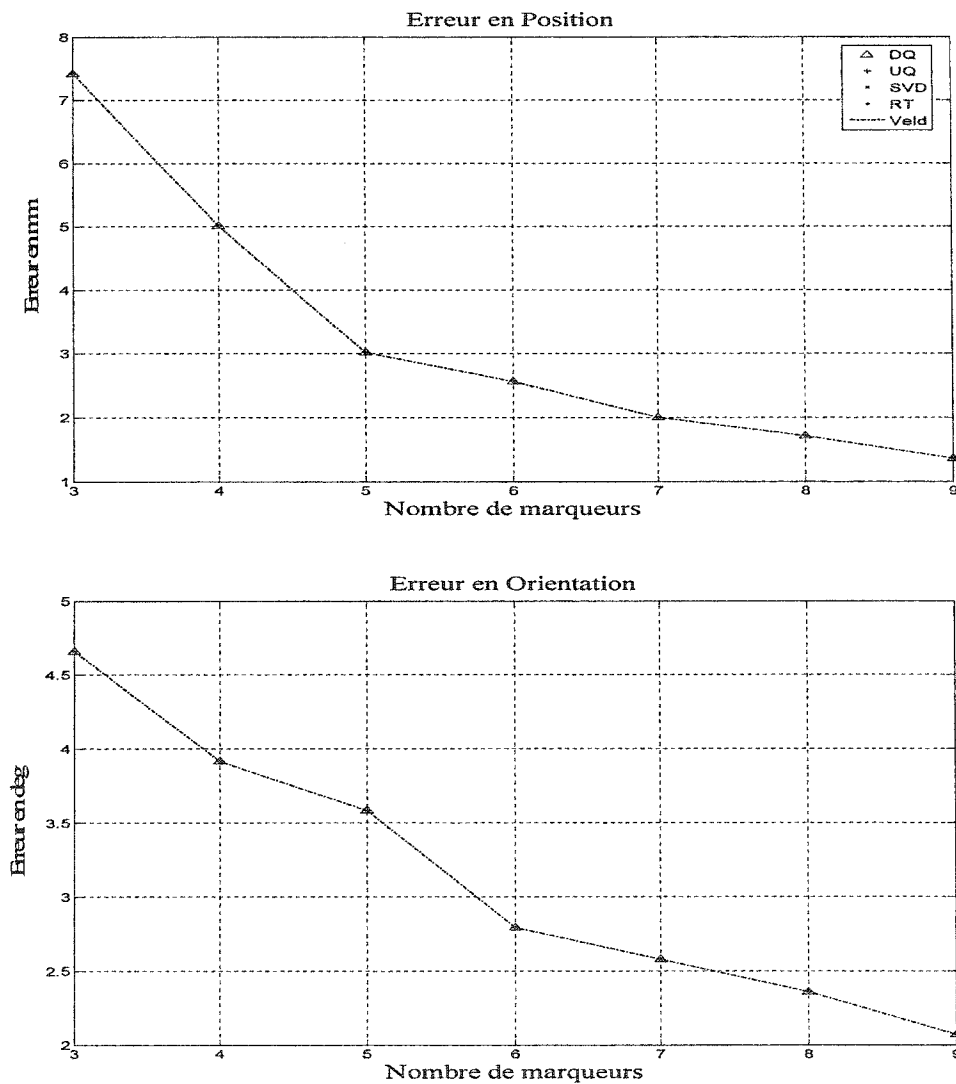


Figure 18 Erreurs sur la position et l'orientation de l'AHF pour une amplitude de rotation de 1 à 2 deg et pour un bruit de 0,1 mm

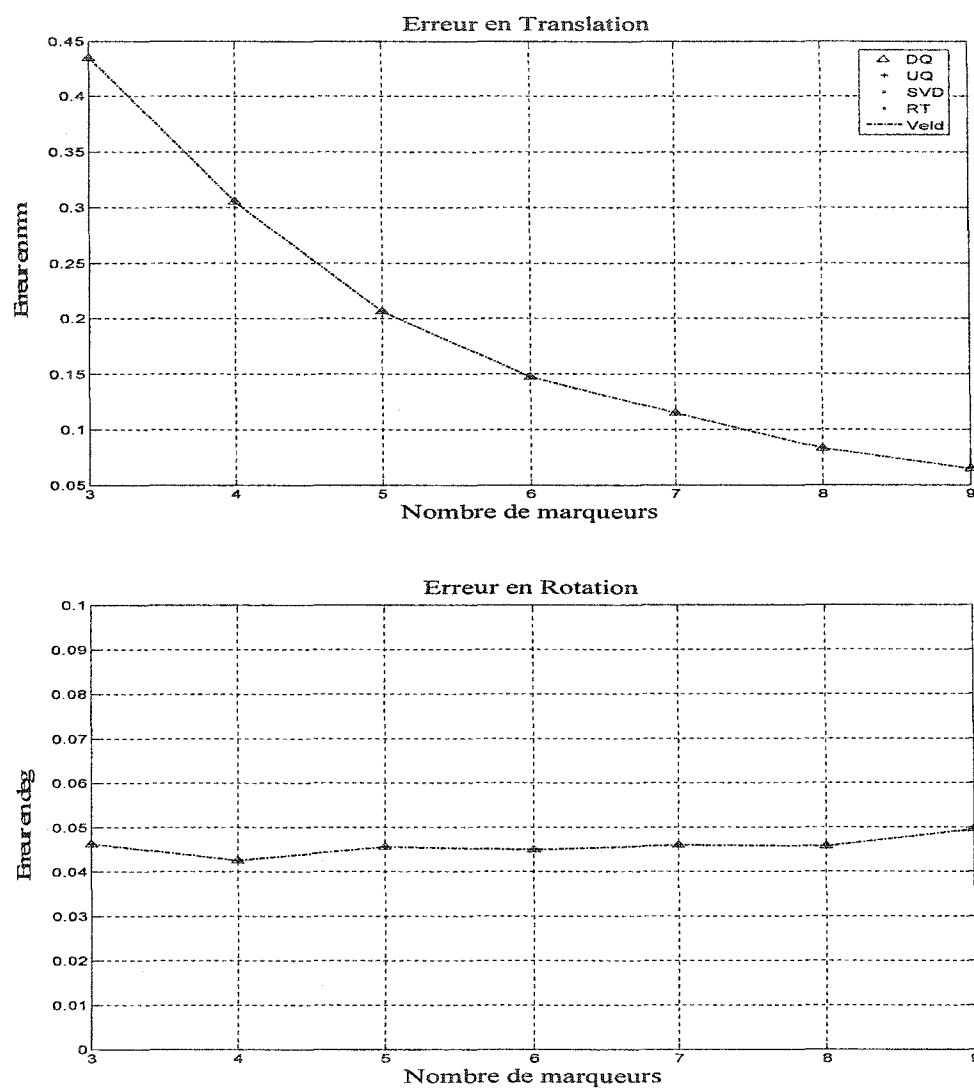


Figure 19 Erreurs sur la translation le long de l'AHF et sur la rotation autour de l'AHF pour une amplitude de rotation de 1 à 2 deg et pour un bruit de 0,1 mm

### 4.3.2 Résultats obtenus pour l'AHI avec bruit

La figure 20 présente l'évolution des erreurs d'estimation des paramètres de l'AHI par la méthode de Woltring après filtrage des trajectoires, pour différents niveaux de bruit. Les courbes d'erreurs obtenues pour les autres méthodes sont très similaires. Les erreurs sont proportionnelles au bruit injecté.

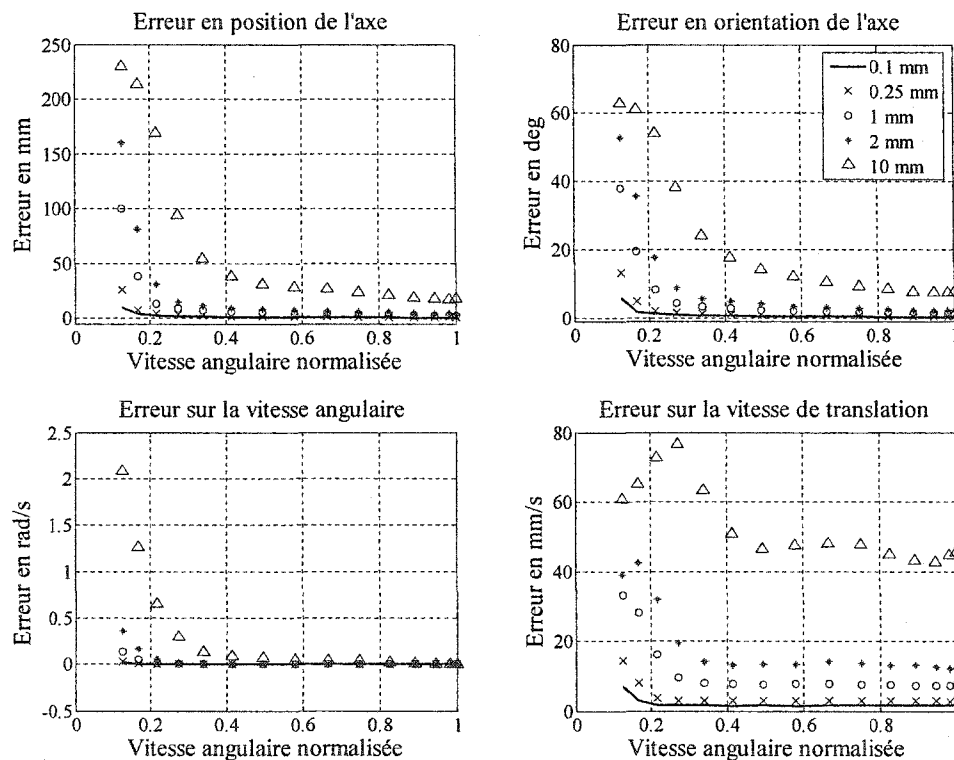


Figure 20 Évolution des moyennes des erreurs d'estimation de l'AHI en fonction du niveau du bruit pour la méthode de Woltring

La figure 21 illustre les erreurs calculées pour les quatre méthodes pour un bruit de 1 mm d'écart type et après filtrage des trajectoires de trois marqueurs.

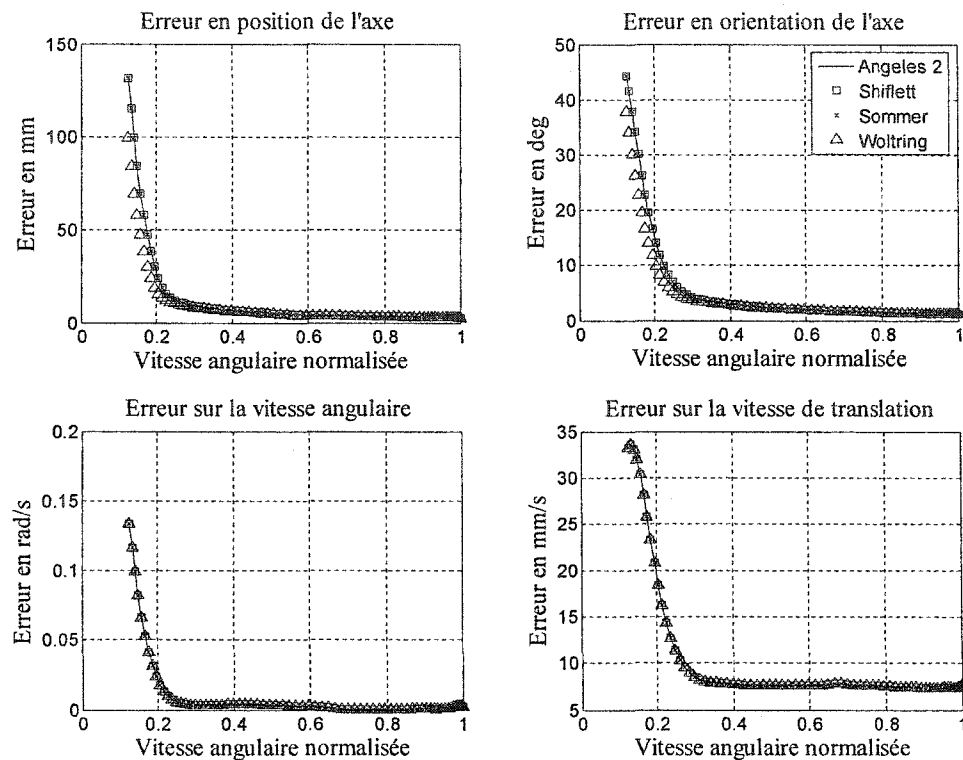


Figure 21 Erreurs d'estimation des paramètres de l'AHI pour un bruit de 1 mm après filtrage des trajectoires de trois marqueurs

On remarque que pour un seuil de  $0,2\omega_{\max}$ , l'erreur moyenne sur la position de l'AHI est égale à  $5,14 \pm 2,89$  mm pour la méthode Woltring et à  $5,72 \pm 4,05$  mm pour les autres méthodes. L'erreur moyenne sur l'estimation de l'orientation de l'AHI est de  $2,39 \pm 1,72$  deg pour la méthode Woltring et de  $2,75 \pm 2,51$  pour les autres méthodes. L'erreur d'estimation de la vitesse de translation le long de l'AHI est de  $8,25 \pm 2,05$  mm/s pour les quatre méthodes. Quant à l'erreur d'estimation de la vitesse angulaire, celle-ci est négligeable.

Les paramètres ont été estimés et les erreurs calculées pour différents profils de vitesses angulaires. Les trajectoires ont été filtrées après avoir été affectées par un bruit de 1 mm d'écart type. La figure 22 illustre les différentes erreurs pour la méthode Woltring et

pour des profils de vitesse angulaire correspondants à des maximums de 1,77 - 4,43 et 5,76 rad/s.

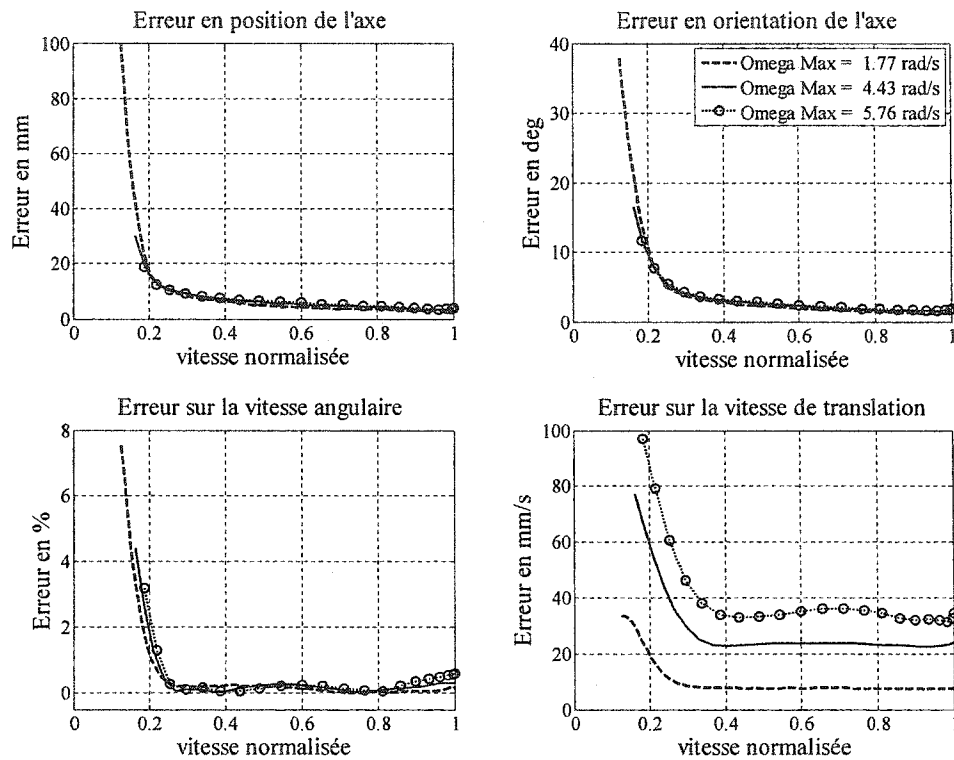


Figure 22 Erreurs d'estimation de l'AHI par la méthode de Woltring, pour différents profils de vitesses angulaires

D'après la figure 22, on remarque qu'à partir d'un seuil de  $0,2\omega_{\max}$ , l'erreur sur la position et l'erreur sur l'orientation de l'AHI ne dépendent plus de l'amplitude maximale de la vitesse angulaire. L'erreur sur la vitesse angulaire autour de l'AHI ne dépend pas de l'amplitude de la vitesse angulaire à partir de  $0,2\omega_{\max}$ . Par contre l'erreur sur la vitesse de translation le long de l'AHI est proportionnelle à l'amplitude maximale de la vitesse angulaire ( $\omega_{\max}$ ).



On a vérifié l'influence du nombre de marqueurs sur les erreurs d'estimation des paramètres de l'AHI. La figure 23 illustre les erreurs d'estimation de la position et de l'orientation de l'AHI pour la méthode Woltring, pour un bruit de 0,1 mm et après filtrage des trajectoires.

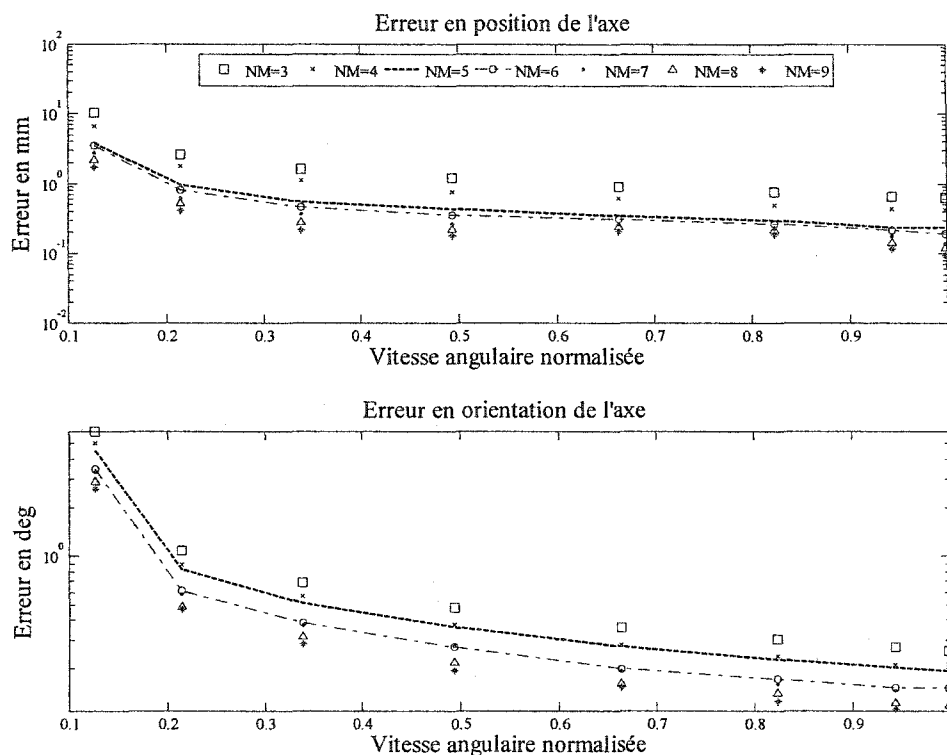


Figure 23 Erreurs moyennes d'estimation de la position et de l'orientation de l'AHI par la méthode de Woltring pour différent nombre de marqueurs (NM) pour un bruit de 0,1 mm et après filtrage des trajectoires

La figure 24 montre les erreurs d'estimation de la vitesse angulaire autour de l'AHI et de la vitesse de translation le long de l'AHI, pour la méthode Woltring, pour un bruit de 0,1 mm d'écart type et après filtrage des trajectoires.

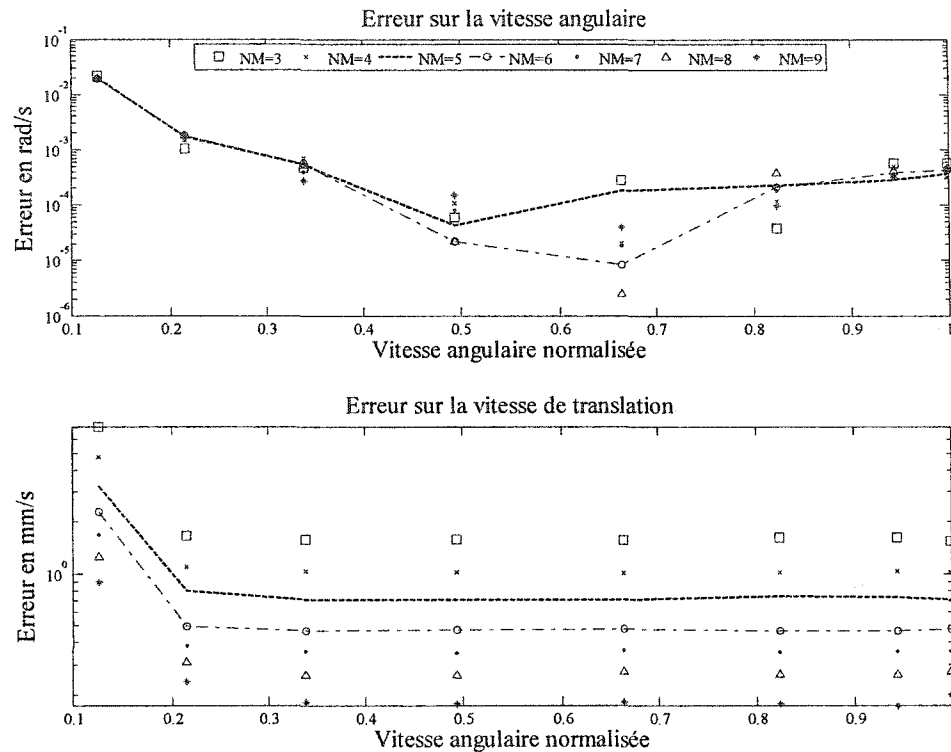


Figure 24 Erreurs moyennes d'estimation de la vitesse angulaire et de la vitesse linéaire autour et le long de l'AHI par la méthode de Woltring pour différent nombre de marqueurs (NM) pour un bruit de 0,1 mm et après filtrage des trajectoires

#### 4.4 Résultats expérimentaux

La manipulation expérimentale effectuée consistait à faire tourner manuellement un bras mécanique autour d'un axe repéré par deux marqueurs. L'axe calculé à partir de ces deux marqueurs était considéré comme étant l'axe exact, cependant il faut noter qu'une erreur de mesure de  $\pm 1$  mm sur les deux extrémités de l'axe, engendre des erreurs de  $\pm 1$  mm et de  $\pm 1$  deg sur la position et l'orientation de l'axe, respectivement. Sur le bras, étaient placés neuf marqueurs et un gyroscope. Les trajectoires des marqueurs ainsi que la vitesse angulaire étaient acquis avec une fréquence d'échantillonnage de 60 Hz. Le

bruit de mesure statique (écart type sur les coordonnées mesurées d'un marqueurs en position statique) est évalué à 0,03 mm.

#### 4.4.1 Résultats expérimentaux obtenus pour l'AHF

On a appliqué les huit méthodes pour estimer l'AHF, en utilisant la totalité du fichier d'acquisition. La figure 25 présente les résultats obtenus par la méthode SVD pour plusieurs séquences d'un mouvement de flexion/extension d'une vitesse maximale égale à 1,2 rad/s. Les erreurs sur l'orientation et la position de l'AHF sont importantes au début du calcul, car il n'y a pas de mouvement et par conséquent l'AHF n'est pas défini.

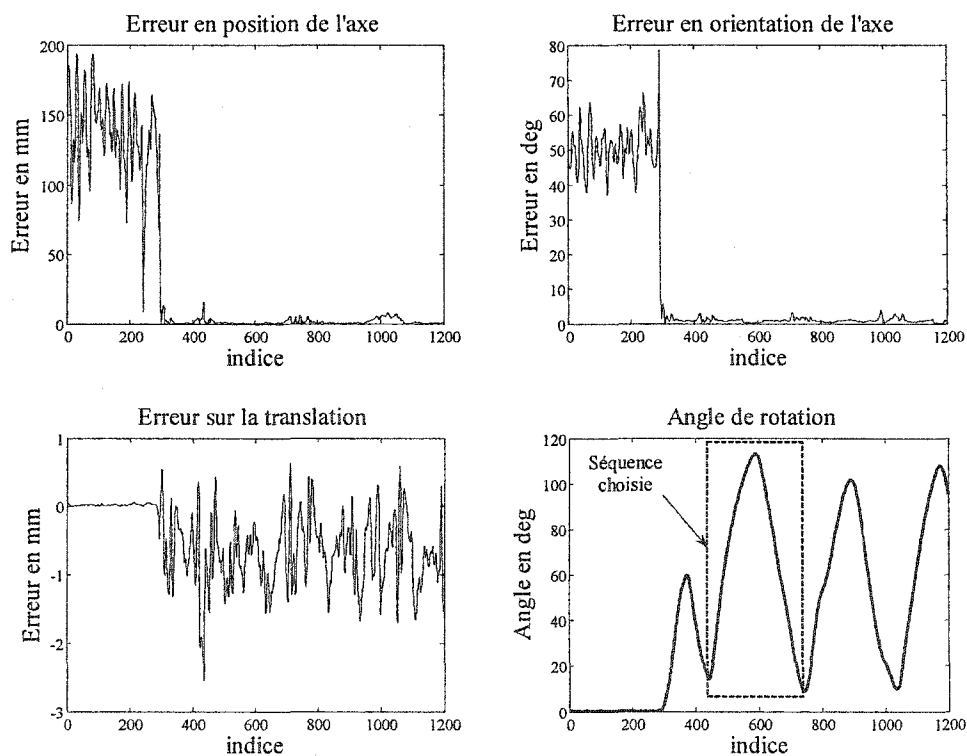


Figure 25 Paramètres estimés de l'AHF par la méthode SVD à partir d'un fichier d'acquisition, correspondant à une vitesse angulaire maximale de 1,2 rad/s

À partir du fichier d'acquisition, on a choisit une séquence qui correspond à un mouvement de flexion/extension du bras ( figure 25 ). La figure 26 illustre l'effet du filtrage sur la qualité des résultats obtenus par la méthode SVD. L'erreur moyenne sur la position de l'AHF passe de 2,29 mm sans filtrage des trajectoires à 1,45 mm après filtrage. L'erreur moyenne sur l'orientation de l'AHF passe de 1,55 deg à 1,21 deg avant et après filtrage respectivement. L'erreur moyenne sur la quantité de translation le long de l'AHF passe de 0,67 mm à 0,33 mm. Finalement l'erreur sur la rotation autour de l'AHF ne change pas significativement et reste inférieure à 1 deg.

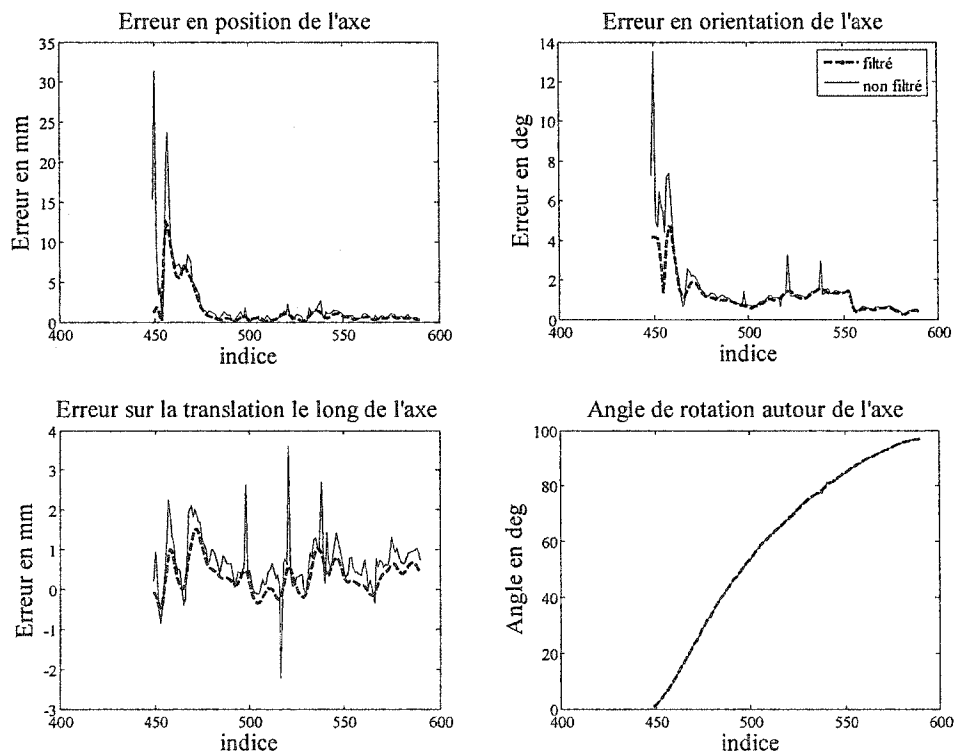


Figure 26 Effet du filtrage des trajectoires sur la qualité des résultats obtenus par la méthode SVD pour 3 marqueurs

La figure 27 et la figure 28 présentent la comparaison des huit méthodes pour la même séquence.

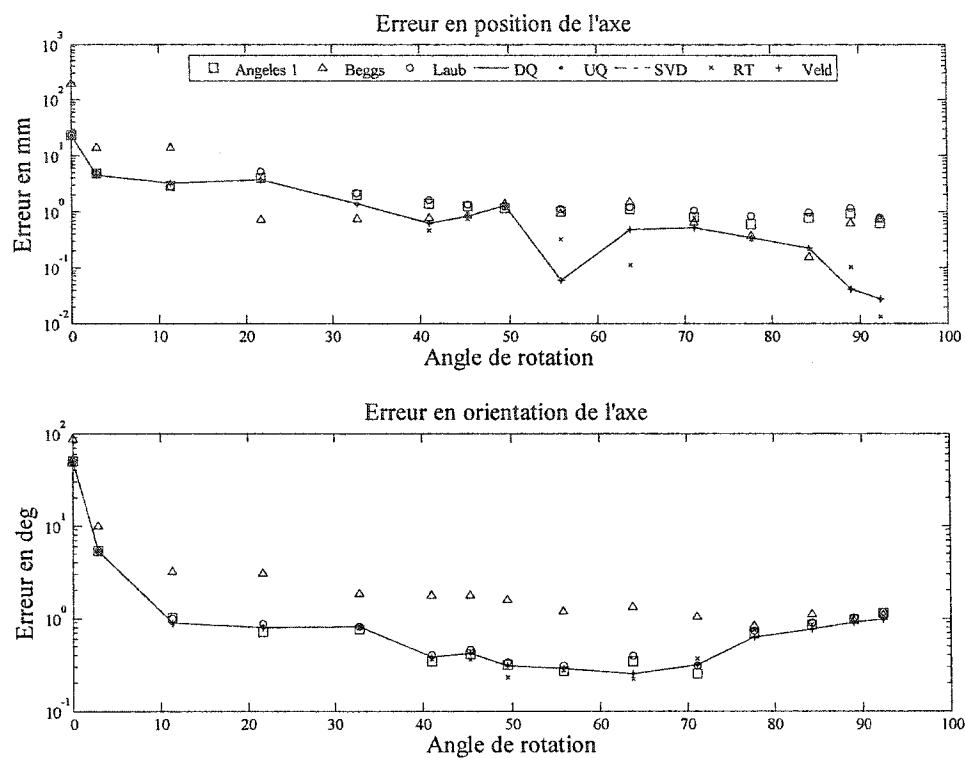


Figure 27 Erreurs sur la position et l'orientation de l'AHF estimés par les huit méthodes pour 3 marqueurs après filtrage des trajectoires

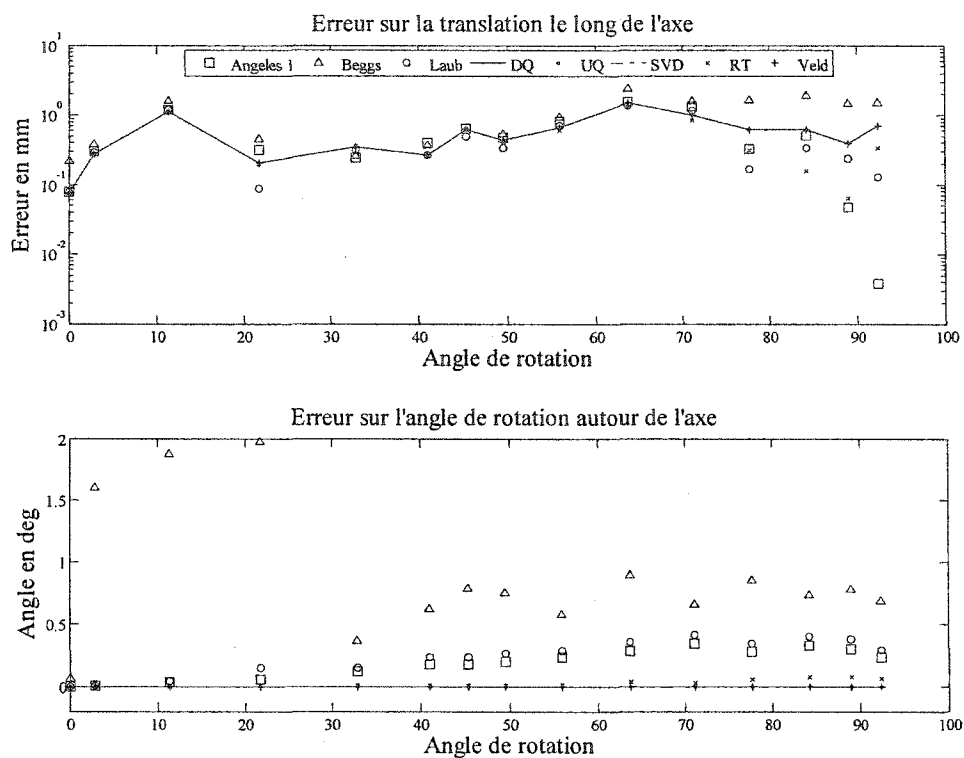


Figure 28 Erreurs sur la quantité de translation le long et la rotation autour de l'AHF estimées par les huit méthodes pour 3 marqueurs après filtrage des trajectoires

À titre d'illustration, la figure 29 montre l'effet du nombre de marqueurs sur les résultats obtenus par la méthode SVD. Des résultats similaires sont obtenus pour les autres méthodes (celles qui peuvent prendre plus de trois marqueurs).

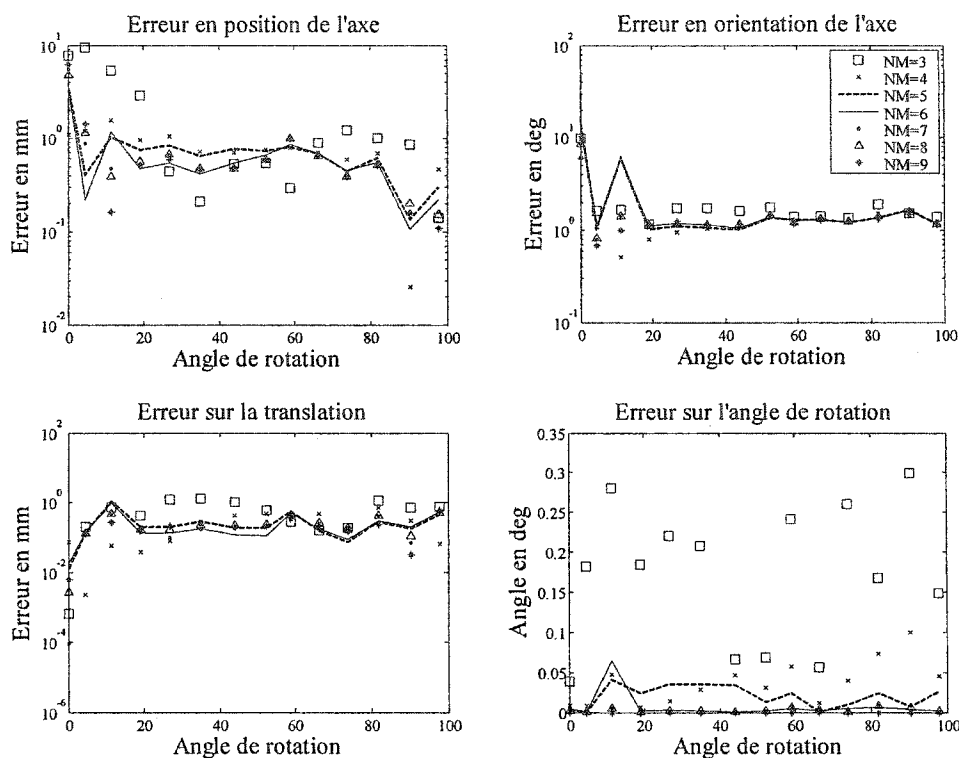


Figure 29 Effet du nombre de marqueurs sur la qualité des résultats obtenus par la méthode SVD après filtrage des trajectoires

#### 4.4.2 Résultats expérimentaux obtenus pour l'AHI

Les erreurs d'estimation des paramètres de l'AHI pour la méthode Woltring appliquée à un fichier d'acquisition sont présentées sur les graphiques de la figure 30. L'effet du filtrage des trajectoires sur la qualité de l'estimation de l'AHI est illustré sur la figure 31 pour la méthode Woltring et pour un nombre de marqueurs égal à trois.

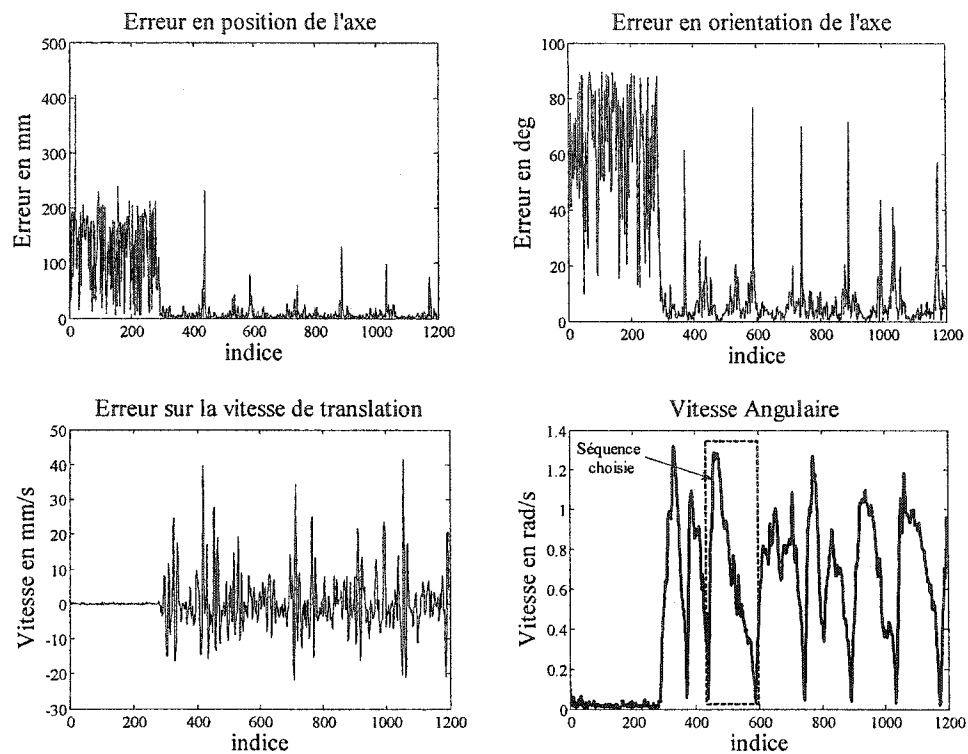


Figure 30 Paramètres calculés par la méthode Woltring à partir d'un fichier d'acquisition correspondant à une vitesse angulaire maximale de 1,4 rad/s

Les erreurs sont importantes pour le début du fichier d'acquisition, car l'AHI n'est pas défini (absence de mouvement). De plus les paramètres ont été estimés à partir de trois marqueurs et sans filtrage. Sur la série de mouvements de flexion/extension, on a choisit une séquence qui correspond à un mouvement d'extension du bras (tel qu'illustrer sur la figure 30).



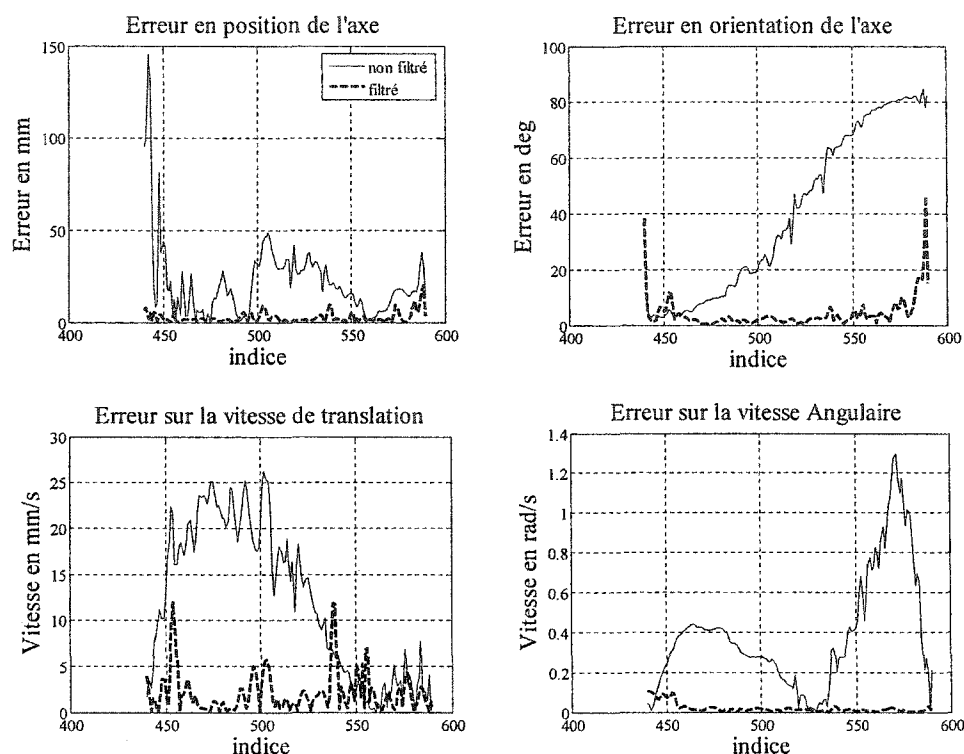


Figure 31 Effet du filtrage des trajectoires sur la qualité des résultats obtenus par la méthode de Woltring pour 3 marqueurs

Suivant les résultats de la figure 31, l'erreur moyenne sur la position passe de 21,9 mm avant filtrage à 2,6 mm après filtrage. L'erreur sur l'orientation est de 39,8 et 4,1 deg avant et après filtrage respectivement. Les erreurs sur la vitesse angulaire et sur la vitesse de translation passent de 0,39 rad/s et 12,12 mm/s à 0,02 rad/s et 2,08 mm/s avant et après filtrage, respectivement.

La comparaison des quatre méthodes pour une séquence de mouvement est présentée sur les graphiques de la figure 32 pour un nombre de marqueurs égal à quatre.

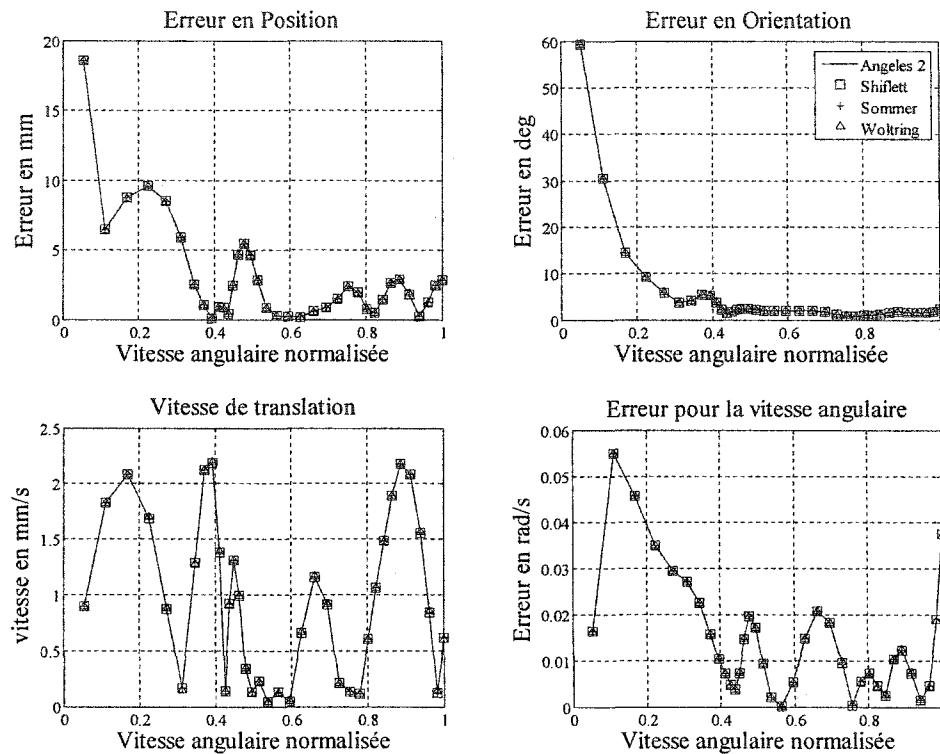


Figure 32 Comparaison des quatre méthodes pour les trajectoires filtrées de quatre marqueurs. Les paramètres sont tracés en fonction de la vitesse angulaire normalisée

On remarque que pour un seuil de  $0,2\omega_{\max}$ , les erreurs d'estimation de l'AHJ sont inférieures à 10 mm pour la position de l'axe, inférieures à 10 deg pour l'orientation de l'axe, inférieures à 2,5 mm/s et 0,04 rad/s pour la vitesse de translation le long et la vitesse de rotation autour de l'AHJ, respectivement.

Dans le cas de l'AHJ, le paramètre le plus important est la vitesse angulaire. En effet les autres paramètres sont calculés à partir du vecteur vitesse angulaire. Pour cela, on a comparé la vitesse angulaire estimée par les quatre méthodes avec celle mesurée par le capteur (gyroscope). Le Tableau V présente les erreurs quadratiques moyennes sur la norme de la vitesse angulaire pour les quatre méthodes et pour différent nombre de marqueurs.

Tableau V

Erreur quadratique moyenne (RMS) en rad/s, sur la norme de la vitesse angulaire estimée par les quatre méthodes en fonction du nombre de marqueur (m)

m	Méthode			
	Angeles 2	Shiflett	Sommer	Woltring
3	0.121	0.121	0.121	0.121
4	0.057	0.057	0.057	0.056
5	0.043	0.043	0.043	0.042
6	0.043	0.043	0.043	0.042
7	0.041	0.041	0.041	0.041
8	0.041	0.041	0.041	0.041
9	0.041	0.041	0.041	0.040

#### 4.5 Approximation de l'AHI par l'AHF

Dans cette partie, on a voulu vérifier si l'approximation de l'AHI par l'AHF était possible et n'engendrait pas beaucoup d'erreurs. Cette approximation est basée sur le résultat d'une simulation de mouvement avec une amplitude de vitesse maximale de 1,8 rad/s, échantillonné à 100 Hz. L'écart type du bruit affectant les données est de 0,25 mm et les calculs sont effectués après filtrage. Ainsi qu'une manipulation expérimentale consistant en une série de mouvements de flexion/extension du bras mécanique. Les deux méthodes comparées pour l'approximation de l'AHI par l'AHF sont Woltring pour l'AHI et SVD pour l'AHF; à partir de ce dernier l'AHI a été estimé.

### 4.5.1 Résultats de la simulation

Les résultats de la simulation sont présentés sur la figure 33 et la figure 34. Les erreurs moyennes sur la position de l'AHF, sur l'orientation de l'AHF, sur la vitesse angulaire et la vitesse de translation approximées sont de 3,3 mm, 1,9 deg, 0,01 rad/s et 2,7 mm/s respectivement. Ces mêmes erreurs sont de 3,1 mm, 1,8 deg, 0,008 rad/s et 2,6 mm/s pour l'AHI.

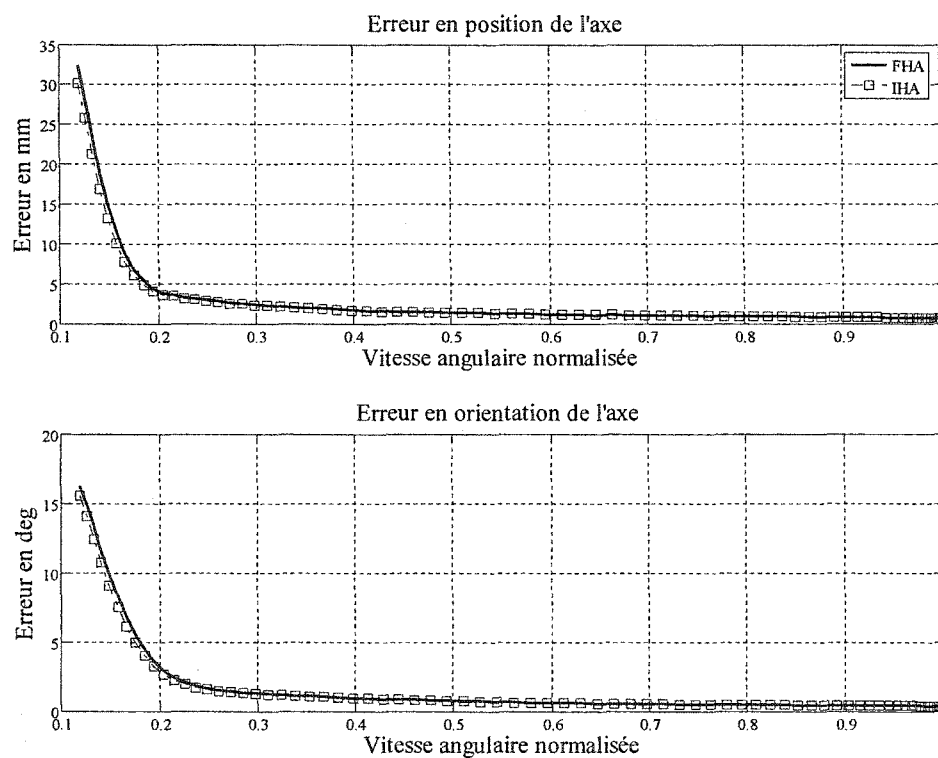


Figure 33 Erreur sur la position et sur l'orientation de l'AHF et de l'AHI dans le cas de la simulation

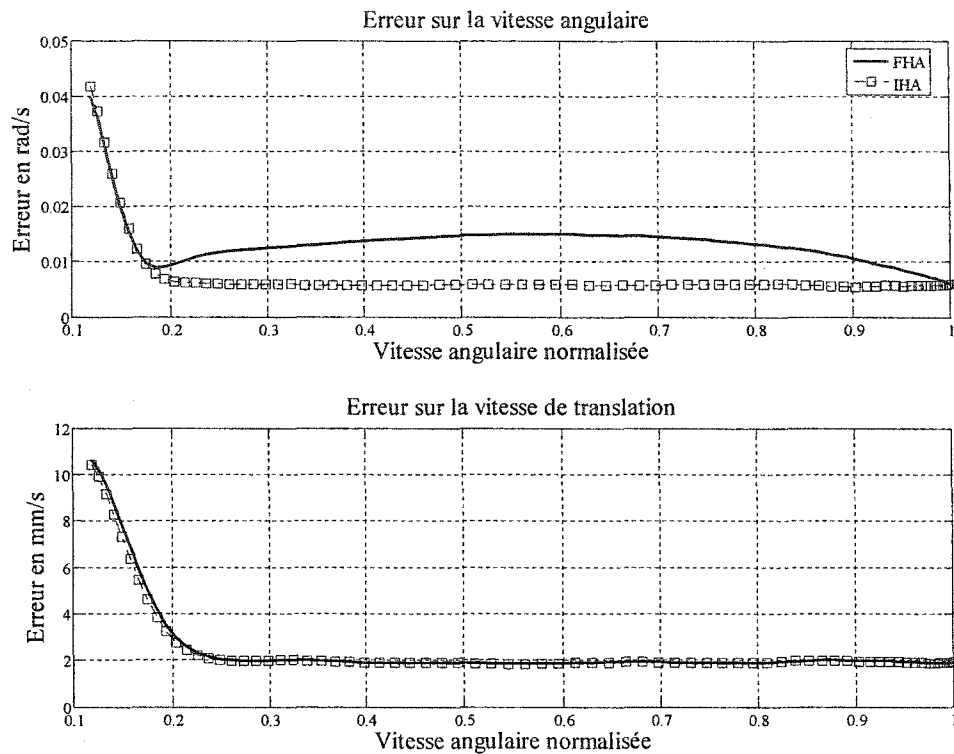


Figure 34 Erreur sur la vitesse angulaire et sur la vitesse de translation autour et le long de l’AHF et de l’AHI dans le cas de la simulation

#### 4.5.2 Résultats expérimentaux

Dans ce cas on note des erreurs moyennes sur la position et sur l’orientation de 2,6 mm et 3,6 deg pour l’AHI et des erreurs de 2,6 mm et 4 deg pour l’AHF. Pour les erreurs moyennes sur la vitesse angulaire et la vitesse de translation, celles-ci sont de 0,03 rad/s et 1 mm/s pour l’AHF et de 0,01 rad/s et 1 mm/s pour l’AHI. Les différentes erreurs obtenues sont illustrées par la figure 35 et la figure 36.

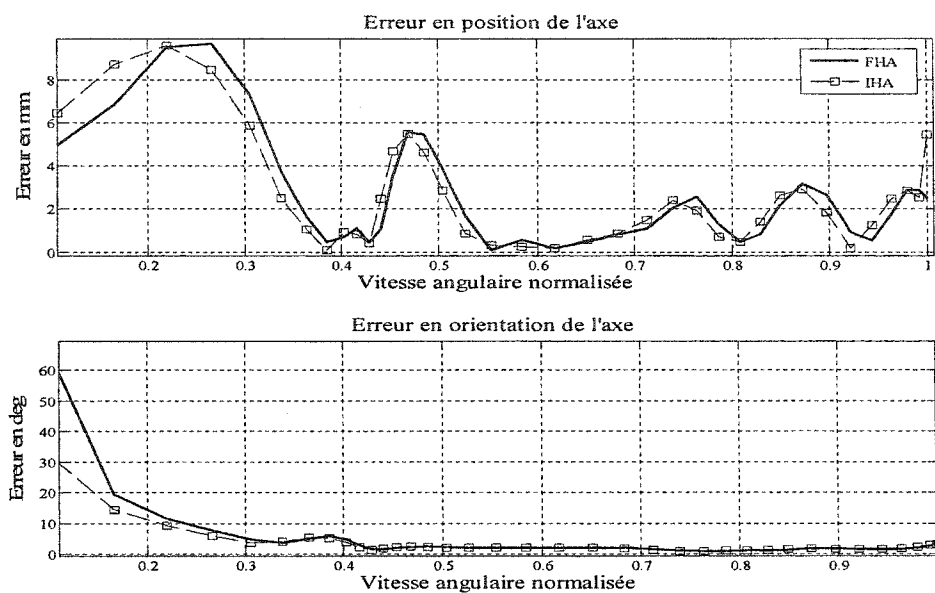


Figure 35 Erreur sur la position et sur l'orientation de l'AHF et de l'AHI dans le cas expérimental

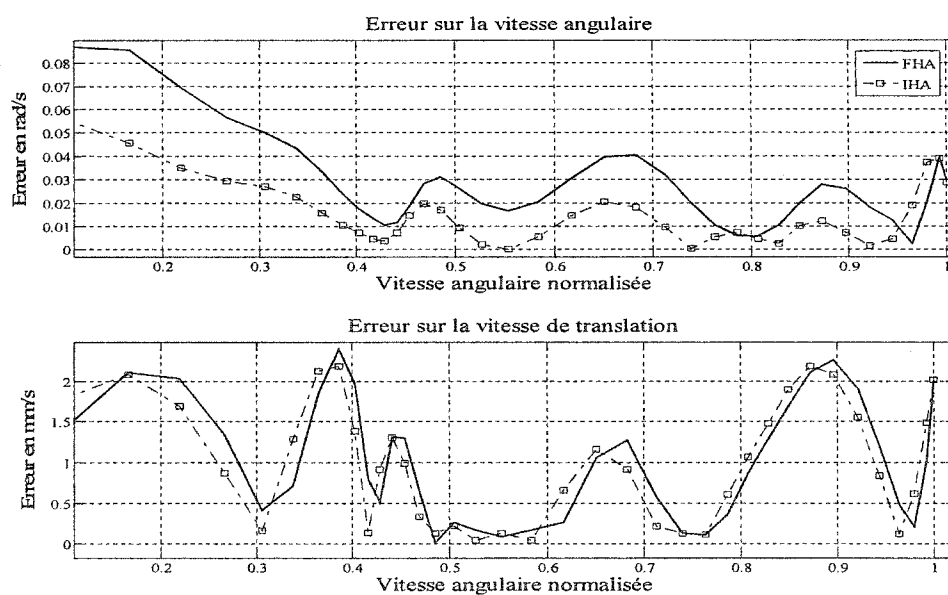


Figure 36 Erreur sur la vitesse angulaire et sur la vitesse de translation autour et le long de l'AHF et de l'AHI dans le cas expérimental

## 4.6 Discussion

Pour l’AHF, les résultats obtenus pour les simulations sans bruit, ont confirmés l’affirmation de Woltring et al [20], et selon laquelle le point le plus précis pour localiser l’AHF est la projection du point milieu du segment reliant les deux centroides avant et après déplacement du corps rigide, sur l’AHF. Les résultats de l’étude comparative dans le contexte de données parfaites, révèlent des erreurs moyennes d’estimation sur la position de l’AHF de l’ordre de  $0,1 \mu m$  pour la méthode DQ et d’une dizaine de  $\mu m$  pour les autres méthodes. Quant aux erreurs moyennes sur l’estimation de l’orientation de l’AHF, de la translation le long et de la rotation autour de l’AHF, celles-ci sont négligeables (de l’ordre, respectivement de  $10^{-3}$  deg,  $10^{-10}$  mm et  $10^{-7}$  deg). Ce qui ressort de la comparaison dans ce contexte, est que la méthode DQ est la plus précise des huit méthodes en terme de précision sur l’estimation de la localisation de l’AHF dans l’espace 3D (sa position et son orientation).

Les erreurs d’estimation de l’AHF sont proportionnelles au niveau du bruit (écart type) affectant les trajectoires des marqueurs et sont inversement proportionnelles à l’amplitude de rotation pour l’erreur sur la position et sur l’orientation de l’AHF. L’erreur sur la quantité de translation le long de l’AHF est proportionnelle à l’amplitude de rotation et finalement l’erreur sur la rotation autour de l’AHF est la moins sensible à l’amplitude de rotation. Ces résultats concordent en terme d’allure (qualitativement) avec les modèles développés par Woltring et al [20] et décrits dans le chapitre 3.

D’après les tableaux de l’annexe, on peut distinguer trois classes différentes d’algorithmes, suivant les erreurs moyennes et leurs écarts type. La classe d’algorithmes les plus performants est composée des méthodes DQ, UQ, SVD, RT et Veld. La deuxième classe est composée des méthodes Angeles 1 et Laub. Finalement la dernière classe est composée de la méthode Beggs. Il faut dire que ces résultats ne sont pas surprenants, car la seule méthode qui ne prend à aucun moment du processus de calcul,

le fait que les données ne soient pas parfaites mais entachées d'erreurs, est la méthode Beggs. Les algorithmes de la classe une, minimisent une fonction erreur exprimée de différentes manières, ce qui leur donne leur avantage.

On note aussi, que la supériorité remarquée de la méthode DQ dans le cas de données parfaites disparaît dans le cas de données bruitées. Ceci a été rapporté dans la littérature [48].

Suivant le niveau de bruit affectant les trajectoires des marqueurs, l'expérimentateur doit fixer un seuil au dessous duquel l'estimation de l'AHF est sujette à d'importantes imprécisions. Par exemple, dans un laboratoire d'analyse de mouvement où on estime les erreurs de mesure à 0,1 mm. En utilisant la méthode SVD et en imposant un seuil de 5 deg pour le calcul de l'AHF, celui-ci est estimé moyennant une erreur sur sa position de l'ordre de 1 mm, une erreur sur son orientation de l'ordre de 3 deg, une erreur sur la quantité de translation de l'ordre de 0,3 mm et une erreur sur la quantité de rotation de l'ordre de 0,13 deg (en consultant les tableaux de l'annexe).

L'augmentation du nombre de marqueurs a pour effet de lisser les paramètres de l'AHF car les erreurs d'estimation de l'AHF sont inversement proportionnelles au nombre de marqueurs.

Le filtrage des trajectoires par la méthode proposée (autocorrélation), est une phase très importante dans le processus de calcul de l'AHF, surtout pour des amplitudes de rotation faibles. Les résultats obtenus concordent avec la littérature [71].

Pour l'AHI, les erreurs d'estimation dans le cas de données parfaites sont négligeables pour les quatre méthodes. Cependant la méthode de Woltring présente les meilleurs résultats.



Dans le cas de données bruitées, les erreurs d'estimation de l'AHI sont proportionnelles au niveau du bruit (écart type) et sont inversement proportionnelles à l'amplitude de la vitesse angulaire.

D'après les résultats obtenus, les quatre méthodes comparées présentent sensiblement les mêmes performances. Cependant on note un léger avantage pour la méthode Woltring (voir Tableau V). Suivant la tolérance établie par l'expérimentateur, celui-ci peut fixer un seuil en fonction de l'amplitude de la vitesse angulaire maximale pour laquelle l'estimation de l'AHI présente des erreurs acceptables. Dans notre cas, on a trouvé qu'un seuil de  $0,2 \omega_{\max}$  permettait d'avoir pour un bruit de 1 mm, une erreur moyenne sur la position de l'AHI inférieure à 10 mm, une erreur sur l'orientation de l'AHI inférieure à 5 deg et une erreur sur la vitesse de translation inférieure à 10 mm/s. Pour d'autres auteurs des seuils différents ont été trouvés. Des seuils de  $0,1 \omega_{\max}$  et de 0,25 rad/s ont été recommandés par Woltring et al [5] et par Stokdijk et al [72] respectivement.

Comme pour l'AHF, l'étape de filtrage des trajectoires est très importante et l'augmentation du nombre de marqueurs améliore la qualité de l'estimation. Cependant La plus grande amélioration pour la partie expérimentale a été notée lors du passage de trois à quatre marqueurs (voir Tableau V).

Aussi, les résultats obtenus pour l'approximation de l'AHI à partir de l'AHF sont comparables. Cela dit, les algorithmes d'estimation de l'AHI sont d'une part beaucoup plus simples et leurs résultats plus précis dans le cas de fréquences d'échantillonnage plus élevées, car l'estimation des premières dérivées (vitesse linéaire) l'est. Ce qui n'est pas le cas des algorithmes d'estimation de l'AHF, où l'augmentation de la fréquence d'échantillonnage entraîne une diminution de l'amplitude de rotation, ce qui augmente l'imprécision.

#### 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une étude comparative de huit méthodes d'estimation de l'AHF et de quatre méthodes d'estimation de l'AHI. L'étude a été effectuée en deux phases. La première consistait en une simulation d'un mouvement avec une vitesse angulaire présentant un profil similaire à celui d'un mouvement articulaire. La deuxième phase est une validation expérimentale. Il a été trouvé que les huit méthodes concernant l'AHF pouvaient être divisées suivant leurs performances en trois classes. Les méthodes UQ, DQ, SVD, Veld, RT étant les plus performantes, représentent la première, suivie des méthodes Angeles 1 et Laub, pour finalement retrouver la moins performante des huit qui est la méthode Beggs. On a trouvé que les quatre méthodes d'estimation de l'AHI étaient sensiblement équivalentes, avec un léger avantage pour la méthode de Woltring.

Le filtrage des trajectoires s'avère une opération importante pour l'estimation de l'AHF et de l'AHI. Suivant la précision voulue on peut fixer des seuils d'amplitude de rotation et de vitesse angulaire pour l'estimation de l'AHF et de l'AHI respectivement.

L'augmentation du nombre de marqueurs permet d'avoir une meilleure précision, cependant un nombre fixé à quatre marqueurs semble un bon compromis entre la précision et l'encombrement.

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Le concept de l'axe hélicoïdal est un outil de plus en plus utilisé par les biomécaniciens. Cependant, il existe différentes méthodes dans la littérature qui permettent d'estimer l'axe hélicoïdal à partir de points appartenant à un corps rigide. Dans cette étude on a essayé d'éclairer le choix des biomécaniciens, en comparant huit méthodes pour l'estimation de l'AHF et quatre méthodes pour l'estimation de l'AHI. Cette comparaison a été réalisée sur deux plans : une simulation par ordinateur et une manipulation expérimentale.

Dans le cas de la simulation, on a reproduit des conditions similaires à ce qu'on retrouve en expérimentation. Pour cela, on a généré les trajectoires 3D de neuf marqueurs à partir d'un mouvement caractérisé par une vitesse angulaire variable. On a rajouté un bruit caractérisé par une distribution normale et une moyenne nulle, avec différents écarts type (0,1-0,25-1-2 et 10 mm) et finalement on a filtré ces trajectoires à l'aide d'un filtre de Butterworth avec une fréquence de coupure déterminée de façon automatique.

Sur le plan expérimental, on a mesuré les trajectoires de neuf marqueurs fixés sur un bras mécanique, à l'aide du système d'analyse d'image VICON. On a aussi, mesuré la vitesse angulaire à l'aide d'un gyroscope triaxial.

Les résultats obtenus montrent que les méthodes d'estimation de l'AHF peuvent être classées suivant leur précision en trois classes[73, 74]. La première et moins précise des trois, est constituée de la méthode Beggs, la deuxième regroupe les méthodes Angeles1 et Laub, et la troisième est celles qui regroupe les méthodes les plus précises, qui sont la méthode UQ, DQ, SVD, RT et Veld. Quant aux quatre méthodes d'estimation de l'AHI, elles se divisent en deux classes. La méthode Woltring présente un léger avantage sur les méthodes Angeles2, Shiflett et Sommer [75]. L'estimation de l'AHI à partir de l'AHF est possible pour des mouvements présentant une vitesse maximale de l'ordre de 2 rad/s

et pour des fréquences d'échantillonnage de l'ordre de 100 Hz. De plus, on a constaté que le filtrage des trajectoires avant l'estimation de l'AHF ou de l'AHI était une opération nécessaire. La précision est liée au nombre de marqueurs, cependant un nombre de marqueurs égal à quatre représente un choix adéquat.

Les limites de cette étude consistent dans la considération d'un axe fixe dans l'espace 3D. Il serait intéressant de voir l'évolution des méthodes comparées dans le contexte d'un axe qui serait variable dans le temps (orientation et position). La distribution des marqueurs n'a pas été prise en compte dans cette étude. Il serait intéressant de voir le comportement de ces méthodes suivant la distribution géométrique des marqueurs utilisés.

## **ANNEXE**

### **Erreur d'estimation des paramètres de l'AHF pour différents niveaux de bruit**

Tableau A 1

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur la position pour un bruit de 0,1 mm pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles I	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	16,81	314,87	16,82	15,14	15,14	15,14	15,14	15,14
	Std	5,06	21,45	5,06	4,58	4,58	4,58	4,58	4,58
1-2	M,	6,37	250,60	6,36	5,72	5,72	5,72	5,72	5,72
	Std	1,52	25,53	1,52	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38
2-3	M,	3,58	181,73	3,58	3,17	3,17	3,17	3,17	3,17
	Std	0,45	21,80	0,45	0,41	0,41	0,41	0,41	0,41
3-4	M,	2,59	107,42	2,59	2,29	2,29	2,29	2,29	2,29
	Std	0,24	23,97	0,25	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
4-5	M,	1,98	49,40	1,98	1,76	1,76	1,76	1,76	1,76
	Std	0,15	13,64	0,14	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
5-10	M,	1,24	14,62	1,24	1,07	1,07	1,07	1,07	1,07
	Std	0,27	6,95	0,27	0,23	0,23	0,23	0,23	0,23
10-20	M,	0,61	3,38	0,61	0,52	0,52	0,52	0,52	0,52
	Std	0,11	1,39	0,11	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
20-30	M,	0,39	1,13	0,39	0,30	0,30	0,30	0,30	0,30
	Std	0,04	0,26	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
30-40	M,	0,28	0,58	0,28	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21
	Std	0,02	0,09	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
40-50	M,	0,24	0,37	0,24	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17
	Std	0,01	0,04	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
50-60	M,	0,22	0,26	0,22	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	Std	0,01	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
60-70	M,	0,19	0,20	0,19	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
	Std	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
70-80	M,	0,17	0,17	0,17	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
	Std	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tableau A 2

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur la position pour un bruit de 0,25 mm  
pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles 1	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	46,23	331,52	46,32	42,90	42,90	42,90	42,90	42,90
	Std	12,89	17,54	12,84	12,84	12,84	12,84	12,84	12,84
1-2	M,	17,45	272,65	17,44	15,14	15,14	15,14	15,14	15,14
	Std	4,59	19,81	4,56	3,90	3,90	3,90	3,90	3,90
2-3	M,	9,61	223,75	9,64	8,44	8,44	8,44	8,44	8,44
	Std	1,27	12,27	1,29	1,11	1,11	1,11	1,11	1,11
3-4	M,	6,75	195,99	6,76	5,96	5,96	5,96	5,96	5,96
	Std	0,69	6,09	0,69	0,63	0,63	0,63	0,63	0,63
4-5	M,	5,12	147,37	5,14	4,36	4,36	4,36	4,36	4,36
	Std	0,45	7,63	0,44	0,43	0,43	0,43	0,43	0,43
5-10	M,	3,23	49,66	3,23	2,75	2,75	2,75	2,75	2,75
	Std	0,72	30,74	0,72	0,53	0,53	0,53	0,53	0,53
10-20	M,	1,60	8,21	1,60	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38
	Std	0,31	3,38	0,31	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27
20-30	M,	0,93	2,67	0,93	0,79	0,79	0,79	0,79	0,79
	Std	0,11	0,58	0,11	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
30-40	M,	0,72	1,44	0,72	0,58	0,58	0,58	0,58	0,58
	Std	0,07	0,26	0,08	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
40-50	M,	0,58	0,88	0,58	0,44	0,44	0,44	0,43	0,44
	Std	0,03	0,09	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
50-60	M,	0,54	0,65	0,54	0,37	0,37	0,37	0,37	0,37
	Std	0,01	0,05	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
60-70	M,	0,46	0,52	0,46	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31
	Std	0,02	0,04	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
70-80	M,	0,42	0,42	0,42	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28
	Std	0,01	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Tableau A 3

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur la position pour un bruit de 1 mm pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles I	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	169,39	359,29	167,52	158,72	158,72	158,72	158,72	158,72
	Std	31,12	4,82	29,04	29,38	29,38	29,38	29,38	29,38
1-2	M,	73,43	324,42	74,03	68,75	68,75	68,75	68,75	68,75
	Std	17,00	15,20	17,44	17,07	17,07	17,07	17,07	17,07
2-3	M,	40,92	289,87	41,17	37,44	37,44	37,44	37,44	37,44
	Std	5,88	10,75	5,91	5,52	5,52	5,52	5,52	5,52
3-4	M,	27,31	260,68	27,49	24,29	24,29	24,29	24,29	24,29
	Std	2,83	7,26	3,24	2,87	2,87	2,87	2,87	2,87
4-5	M,	20,94	243,09	20,98	18,55	18,55	18,55	18,55	18,55
	Std	1,41	2,82	1,46	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36
5-10	M,	13,00	181,14	13,02	11,37	11,37	11,37	11,36	11,37
	Std	2,60	30,80	2,54	2,22	2,22	2,22	2,22	2,22
10-20	M,	6,23	47,57	6,23	5,35	5,35	5,35	5,35	5,35
	Std	1,22	30,70	1,21	1,10	1,10	1,10	1,10	1,10
20-30	M,	3,70	11,07	3,73	3,08	3,08	3,08	3,09	3,08
	Std	0,43	2,52	0,47	0,45	0,45	0,45	0,45	0,45
30-40	M,	2,92	5,99	2,90	2,17	2,17	2,17	2,17	2,17
	Std	0,25	1,03	0,26	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
40-50	M,	2,42	3,79	2,40	1,75	1,75	1,75	1,75	1,75
	Std	0,08	0,39	0,09	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
50-60	M,	2,05	2,68	2,03	1,41	1,41	1,41	1,41	1,41
	Std	0,10	0,30	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
60-70	M,	1,85	2,03	1,81	1,22	1,22	1,22	1,21	1,22
	Std	0,06	0,16	0,07	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
70-80	M,	1,71	1,72	1,67	1,05	1,05	1,05	1,05	1,05
	Std	0,03	0,08	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03



Tableau A 4

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur la position pour un bruit de 2 mm pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles I	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	207,59	356,53	209,66	207,82	207,82	207,82	207,82	207,82
	Std	13,55	4,01	12,76	13,22	13,22	13,22	13,22	13,22
1-2	M,	142,96	351,64	145,41	135,97	135,97	135,97	135,97	135,97
	Std	26,86	6,26	26,30	24,59	24,59	24,59	24,59	24,59
2-3	M,	83,45	326,91	84,05	76,57	76,57	76,57	76,56	76,57
	Std	12,36	14,64	12,80	11,66	11,66	11,66	11,66	11,66
3-4	M,	59,40	302,82	59,32	54,25	54,25	54,25	54,24	54,25
	Std	5,96	7,77	6,33	5,51	5,51	5,51	5,52	5,51
4-5	M,	44,59	278,78	44,10	40,96	40,96	40,96	40,95	40,96
	Std	3,41	5,83	3,22	3,20	3,20	3,20	3,20	3,20
5-10	M,	26,37	240,40	26,31	23,74	23,74	23,74	23,73	23,74
	Std	6,05	25,73	6,35	6,08	6,08	6,08	6,08	6,08
10-20	M,	13,05	111,65	13,10	11,30	11,30	11,30	11,29	11,30
	Std	2,79	44,73	2,69	2,48	2,48	2,48	2,48	2,48
20-30	M,	7,93	26,03	8,06	6,36	6,36	6,36	6,36	6,36
	Std	0,68	7,19	0,68	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67
30-40	M,	5,81	12,19	5,84	4,48	4,48	4,48	4,48	4,48
	Std	0,53	2,34	0,52	0,41	0,41	0,41	0,41	0,41
40-50	M,	5,03	7,68	4,93	3,50	3,50	3,50	3,49	3,50
	Std	0,16	0,89	0,20	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27
50-60	M,	4,35	5,47	4,23	2,91	2,91	2,91	2,91	2,91
	Std	0,14	0,42	0,14	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
60-70	M,	4,04	4,19	3,90	2,58	2,58	2,58	2,58	2,58
	Std	0,13	0,44	0,16	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
70-80	M,	3,68	3,45	3,44	2,21	2,21	2,21	2,21	2,21
	Std	0,08	0,10	0,08	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12





Tableau A 7

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur l'orientation pour un bruit de 0,25 mm pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles l	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	20,52	54,40	20,51	20,60	20,60	20,60	20,60	20,60
	Std	5,32	3,36	5,32	5,33	5,33	5,33	5,33	5,33
1-2	M,	8,39	43,21	8,37	8,39	8,39	8,39	8,39	8,39
	Std	1,99	4,23	1,98	1,99	1,99	1,99	1,99	1,99
2-3	M,	4,73	33,00	4,73	4,74	4,74	4,74	4,74	4,74
	Std	0,62	2,03	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62	0,62
3-4	M,	3,39	24,46	3,39	3,40	3,40	3,40	3,40	3,40
	Std	0,29	3,18	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29
4-5	M,	2,66	13,74	2,65	2,66	2,66	2,66	2,66	2,66
	Std	0,21	3,21	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
5-10	M,	1,62	2,86	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62	1,62
	Std	0,36	2,19	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36
10-20	M,	0,78	0,78	0,78	0,78	0,78	0,78	0,78	0,78
	Std	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18
20-30	M,	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46	0,46
	Std	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
30-40	M,	0,33	0,33	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32	0,32
	Std	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
40-50	M,	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
	Std	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
50-60	M,	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21
	Std	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,01	0,02
60-70	M,	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18
	Std	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
70-80	M,	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
	Std	0,00	0,01	0,00	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01





Tableau A 10

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur l'orientation pour un bruit de 10 mm  
pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles l	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	67,72	60,21	62,02	65,06	65,06	65,06	65,05	65,06
	Std	2,96	0,98	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
1-2	M,	69,53	64,54	60,63	63,91	63,91	63,91	63,89	63,91
	Std	0,68	1,32	0,15	0,21	0,21	0,21	0,21	0,21
2-3	M,	68,60	66,84	59,80	63,13	63,13	63,13	63,11	63,13
	Std	0,38	0,59	0,44	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60
3-4	M,	67,24	66,77	58,12	60,35	60,35	60,35	60,33	60,35
	Std	0,43	0,44	0,57	1,01	1,01	1,01	1,01	1,01
4-5	M,	64,97	66,75	55,19	56,83	56,83	56,83	56,81	56,83
	Std	0,80	0,10	1,13	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32
5-10	M,	57,27	62,20	45,36	45,63	45,63	45,63	45,61	45,63
	Std	3,92	2,97	4,80	5,50	5,50	5,50	5,50	5,50
10-20	M,	43,05	47,27	27,99	27,63	27,63	27,63	27,61	27,63
	Std	4,00	6,19	4,66	4,48	4,48	4,48	4,48	4,48
20-30	M,	32,59	28,59	17,27	17,17	17,17	17,17	17,16	17,17
	Std	1,85	4,09	1,75	1,73	1,73	1,73	1,72	1,73
30-40	M,	28,37	16,74	12,94	12,85	12,85	12,85	12,85	12,85
	Std	1,42	2,83	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14
40-50	M,	24,46	10,75	9,97	9,97	9,97	9,97	9,97	9,97
	Std	0,89	1,12	0,70	0,68	0,68	0,68	0,69	0,68
50-60	M,	23,05	8,40	8,29	8,27	8,27	8,27	8,28	8,27
	Std	0,22	0,33	0,28	0,27	0,27	0,27	0,27	0,27
60-70	M,	21,42	7,07	7,02	7,01	7,01	7,01	7,03	7,01
	Std	0,60	0,35	0,33	0,34	0,34	0,34	0,33	0,34
70-80	M,	20,94	6,28	6,28	6,25	6,25	6,25	6,29	6,25
	Std	0,65	0,15	0,14	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15









Tableau A 14

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur la translation pour un bruit de 2 mm pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles 1	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	1,25	2,32	1,27	1,28	1,28	1,28	1,28	1,28
	Std	0,92	1,77	0,93	0,94	0,94	0,94	0,94	0,94
1-2	M,	3,69	7,87	3,75	3,73	3,73	3,73	3,73	3,73
	Std	0,47	1,53	0,48	0,45	0,45	0,45	0,45	0,45
2-3	M,	4,65	12,01	4,71	4,58	4,58	4,58	4,58	4,58
	Std	0,21	1,04	0,20	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18
3-4	M,	5,16	15,29	5,19	5,08	5,08	5,08	5,09	5,08
	Std	0,12	0,94	0,09	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
4-5	M,	5,41	17,77	5,37	5,28	5,28	5,28	5,28	5,28
	Std	0,07	0,83	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
5-10	M,	5,62	22,88	5,54	5,49	5,49	5,49	5,49	5,49
	Std	0,07	1,90	0,03	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
10-20	M,	5,89	13,56	5,72	5,69	5,69	5,69	5,69	5,69
	Std	0,07	5,80	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
20-30	M,	5,99	5,71	5,72	5,70	5,70	5,70	5,70	5,70
	Std	0,04	0,08	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
30-40	M,	6,11	5,66	5,69	5,67	5,67	5,67	5,67	5,67
	Std	0,04	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
40-50	M,	6,26	5,70	5,74	5,72	5,72	5,72	5,72	5,72
	Std	0,09	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07
50-60	M,	6,56	5,71	5,75	5,73	5,73	5,73	5,74	5,73
	Std	0,22	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18
60-70	M,	6,87	5,85	5,88	5,86	5,86	5,86	5,87	5,86
	Std	0,05	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,08
70-80	M,	7,06	5,74	5,76	5,75	5,75	5,75	5,77	5,75
	Std	0,12	0,09	0,09	0,10	0,10	0,10	0,11	0,10

Tableau A 15

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur la translation pour un bruit de 10 mm  
pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles l	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	2,21	3,29	2,23	2,25	2,25	2,25	2,25	2,25
	Std	1,45	2,20	1,46	1,48	1,48	1,48	1,49	1,48
1-2	M,	5,33	8,98	5,47	5,63	5,63	5,63	5,63	5,63
	Std	0,74	1,52	0,75	0,78	0,78	0,78	0,78	0,78
2-3	M,	7,91	13,97	8,11	8,35	8,35	8,35	8,35	8,35
	Std	0,82	1,80	0,89	0,94	0,94	0,94	0,93	0,94
3-4	M,	10,25	18,76	10,57	10,78	10,78	10,78	10,79	10,78
	Std	0,73	1,30	0,78	0,76	0,76	0,76	0,76	0,76
4-5	M,	12,67	23,68	12,95	13,19	13,19	13,19	13,20	13,19
	Std	0,81	1,81	0,83	0,80	0,80	0,80	0,80	0,80
5-10	M,	18,98	36,68	18,63	18,78	18,78	18,78	18,79	18,78
	Std	3,06	6,01	2,35	2,19	2,19	2,19	2,19	2,19
10-20	M,	29,28	53,83	23,17	23,03	23,03	23,03	23,03	23,03
	Std	3,14	3,13	0,80	0,73	0,73	0,73	0,73	0,73
20-30	M,	40,11	51,79	25,92	25,77	25,77	25,77	25,78	25,77
	Std	3,32	2,57	0,88	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96
30-40	M,	51,53	38,23	26,75	26,54	26,54	26,54	26,55	26,54
	Std	3,04	4,51	0,21	0,19	0,19	0,19	0,19	0,19
40-50	M,	59,89	28,94	26,25	26,18	26,18	26,18	26,19	26,18
	Std	3,16	1,64	0,14	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13
50-60	M,	73,28	27,43	27,15	27,02	27,02	27,02	27,06	27,02
	Std	3,96	0,24	0,47	0,42	0,42	0,42	0,44	0,42
60-70	M,	83,65	26,83	26,76	26,57	26,57	26,57	26,62	26,57
	Std	3,63	0,43	0,27	0,33	0,33	0,33	0,29	0,33
70-80	M,	97,45	26,56	26,79	26,48	26,48	26,48	26,61	26,48
	Std	1,75	0,15	0,25	0,13	0,13	0,13	0,17	0,13





Tableau A 18

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur la rotation pour un bruit de 1 mm pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles l	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	0,19	2,85	0,19	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18
	Std	0,12	0,99	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
1-2	M,	0,18	2,53	0,17	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18
	Std	0,06	0,50	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
2-3	M,	0,04	1,43	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
	Std	0,03	0,25	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
3-4	M,	0,01	0,79	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
	Std	0,01	0,17	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
4-5	M,	0,03	0,22	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
	Std	0,00	0,20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5-10	M,	0,06	0,66	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
	Std	0,02	0,30	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
10-20	M,	0,10	0,44	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
	Std	0,01	0,18	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
20-30	M,	0,12	0,16	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
	Std	0,01	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
30-40	M,	0,10	0,10	0,09	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
	Std	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
40-50	M,	0,12	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,11
	Std	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
50-60	M,	0,13	0,12	0,12	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
	Std	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
60-70	M,	0,13	0,11	0,12	0,11	0,11	0,11	0,12	0,11
	Std	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
70-80	M,	0,13	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12
	Std	0,02	0,01	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tableau A 19

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur la rotation pour un bruit de 2 mm pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles I	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	0,75	4,24	0,70	0,67	0,67	0,67	0,67	0,67
	Std	0,49	1,42	0,44	0,43	0,43	0,43	0,43	0,43
1-2	M,	0,96	4,55	0,87	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84
	Std	0,18	0,50	0,18	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17
2-3	M,	0,56	3,13	0,48	0,49	0,49	0,49	0,49	0,49
	Std	0,06	0,43	0,06	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
3-4	M,	0,44	2,14	0,37	0,38	0,38	0,38	0,38	0,38
	Std	0,04	0,29	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
4-5	M,	0,32	1,47	0,27	0,28	0,28	0,28	0,28	0,28
	Std	0,04	0,22	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
5-10	M,	0,16	0,74	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14	0,14
	Std	0,06	0,41	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
10-20	M,	0,03	1,03	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
	Std	0,03	0,35	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
20-30	M,	0,07	0,35	0,05	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
	Std	0,03	0,04	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
30-40	M,	0,10	0,21	0,07	0,04	0,04	0,04	0,05	0,04
	Std	0,01	0,05	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
40-50	M,	0,12	0,11	0,08	0,06	0,06	0,06	0,07	0,06
	Std	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
50-60	M,	0,14	0,12	0,08	0,06	0,06	0,06	0,07	0,06
	Std	0,01	0,01	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
60-70	M,	0,15	0,10	0,08	0,05	0,05	0,05	0,06	0,05
	Std	0,01	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01
70-80	M,	0,18	0,11	0,11	0,08	0,08	0,08	0,09	0,08
	Std	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,01



Tableau A 20

Moyenne (M) et écart type (Std) de l'erreur sur la rotation pour un bruit de 10 mm pour différents intervalles

Angle	M/Std	Angeles I	Beggs	Laub	DQ	UQ	SVD	RT	Veld
0-1	M,	7,56	11,54	4,67	4,45	4,45	4,45	4,44	4,45
	Std	5,22	4,36	2,87	2,75	2,75	2,75	2,73	2,75
1-2	M,	13,71	15,56	7,86	7,49	7,49	7,49	7,45	7,49
	Std	0,57	0,31	0,30	0,31	0,31	0,31	0,31	0,31
2-3	M,	11,40	14,45	6,74	6,39	6,39	6,39	6,35	6,39
	Std	0,48	0,39	0,26	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
3-4	M,	11,22	13,78	6,18	5,86	5,86	5,86	5,82	5,86
	Std	0,13	0,20	0,16	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15
4-5	M,	11,37	12,77	5,61	5,30	5,30	5,30	5,26	5,30
	Std	0,22	0,39	0,23	0,22	0,22	0,22	0,22	0,22
5-10	M,	9,12	9,12	4,21	3,91	3,91	3,91	3,87	3,91
	Std	0,71	1,18	0,58	0,56	0,56	0,56	0,56	0,56
10-20	M,	5,69	3,46	2,62	2,43	2,43	2,43	2,37	2,43
	Std	1,03	1,90	0,39	0,41	0,41	0,41	0,42	0,41
20-30	M,	2,61	0,47	1,66	1,39	1,39	1,39	1,30	1,39
	Std	0,74	0,23	0,19	0,17	0,17	0,17	0,18	0,17
30-40	M,	1,02	0,20	1,23	1,03	1,03	1,03	0,91	1,03
	Std	0,57	0,11	0,16	0,08	0,08	0,08	0,09	0,08
40-50	M,	2,40	0,39	1,05	0,69	0,69	0,69	0,53	0,69
	Std	0,65	0,19	0,08	0,10	0,10	0,10	0,11	0,10
50-60	M,	4,62	0,34	0,76	0,54	0,54	0,54	0,34	0,54
	Std	1,33	0,06	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
60-70	M,	6,94	0,46	0,59	0,43	0,43	0,43	0,18	0,43
	Std	0,60	0,11	0,15	0,04	0,04	0,04	0,05	0,04
70-80	M,	9,08	0,46	0,43	0,40	0,40	0,40	0,11	0,40
	Std	0,83	0,09	0,07	0,07	0,07	0,07	0,06	0,07

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. M. Gallo, K. Fushima, and S. Palla, "Mandibular Helical Axis Pathways During Mastication," *Journal of Dental Research*, vol. 79, pp. 1566-1572, 2000.
- [2] J. A. Gal, L. M. Gallo, S. Palla, G. Murray, and I. Klineberg, "Analysis of human mandibular mechanics based on screw theory and in vivo data," *Journal of Biomechanics*, vol. 37, pp. 1405-1412, 2004.
- [3] F. Ohberg, H. Grip, U. Wiklund, Y. Sterner, J. S. Karlson, and B. Gerdle, "Chronic Whiplash Associated Disorders and Neck Movement Measurements: An Instantaneous Helical Axis Approach," *IEEE Transactions on Information Tehnology in Biomedecine*, vol. 7, pp. 274-282, 2003.
- [4] H. Grip, F. Ohberg, U. Wiklund, Y. Sterner, J. S. Karlson, and B. Gerdle, "Classification of Neck Movement Patterns Related to Whiplash-Associated Disorders Using Neural Networks," *IEEE Transactions on Information Tehnology in Biomedecine*, vol. 7, pp. 412-418, 2003.
- [5] H. J. Woltring, K. Long, P. J. Osterbauer, and A. W. Fuhr, "Instantaneous Helical Axis Estimation From 3D Video Data in Neck Kinematics for Whiplash Diagnostics," *Journal of Biomechanics*, vol. 27, pp. 1415-1432, 1994.
- [6] J.-P. Baeyens, P. V. Roy, A. D. Schepper, G. Declercq, and J.-P. Clarijs, "Glenohumeral Joint kinematics Related to Minor Anterior Instability of the Shoulder at the end of the Late Preparatory Phase of Throwing," *Clinical Biomechanics*, pp. 752-757, 2001.
- [7] M. Stokdijk, J. Nagels, E. H. Garling, and P. M. Rozing, "The Kinematic Elbow Axis as a Parameter to Evaluate Total Elbow Replacement: A Cadaver Study of the iBP Elbow System," *Journal of Shoulder Elbow Surgery*, vol. 12, pp. 63-68, 2003.
- [8] T. R. Duck, C. E. Dunning, A. D. Armstrong, J. A. Johnson, and G. J. W. King, "Application of Screw Displacement Axes to Quantify Elbows Instability," *Clinical Biomechanics*, vol. 18, pp. 303-310, 2003.
- [9] D. Veeger and B. Yu, "Orientation of Axes in the Elbow and Forarm for Biomechanical Modeling," *IEEE Trans Biomed Eng*, vol. 1, pp. 377:380, 1996.
- [10] P. Salvia, L. Woestyn, J. H. David, V. Feipel, S. Van, S. Jan, P. Klein, and M. Rooze, "Analysis of Helical Axes, Pivot, and Envelope in Active Wrist Circumduction," *Clinical Biomechanics*, vol. 15, pp. 103-111, 2000.

- [11] L. Chèze, N. Doriot, M. Eckert, C. Rumelhart, and J. J. Comtet, "Étude Cinématique in Vivo de L'articulation Trapézométacarpienne," *Chirurgie de la main*, pp. 23-30, 2001.
- [12] T. F. Besier, D. L. Sturnieks, J. A. Alderson, and D. G. Lloyd, "Repeatability of Gait Data Using a Functional Hip Joint Centre and a Mean Helical Axis," *Journal of Biomechanics*, pp. in press, 2003.
- [13] L. Blankevoort, R. Huiskes, and A. d. Lange, "Helical Axes of Passive Knee Joint Motions," *Journal of Biomechanics*, vol. 23, pp. 1219-1229, 1990.
- [14] S. K. Boyd and J. L. Ronsky, "Instantaneous Moment Arm Determination of the Cat Knee," *Journal of Biomechanics*, vol. 31, pp. 279-283, 1998.
- [15] S. Martelli, S. Zaffagnini, B. Falcioni, and M. Marcacci, "Intraoperative Kinematic Protocol for Knee Joint Evaluation," *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, vol. 62, pp. 77-86, 2000.
- [16] J. L. Krevolin, M. G. Pandy, and J. C. Pearce, "Moment Arm of the Patellar Tendon in the Human Knee," *Journal of Biomechanics*, in press.
- [17] A. Leardini, R. Stagni, and J. J. O'Connor, "Mobility of the Subtalar Joint in the Intact Ankle Complex," *Journal of Biomechanics*, vol. 34, pp. 805-809, 2001.
- [18] K. W. Spring, "Euler Parameters and the Use of Quaternion Algebra in the Manipulation of Finite Rotations: A Review," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 21, pp. 365-373, 1986.
- [19] J. J. Craig, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Second ed: Addison Wesley Longman, 1955.
- [20] H. J. Woltring, R. Huiskes, and A. D. Lange, "Finite Centroid and Helical Axis Estimation from Noisy Landmark Measurements in the Study of Human Joint Kinematics," *Journal of Biomechanics*, vol. 18, pp. 379-389, 1985.
- [21] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems*, Second ed: Springer, 2003.
- [22] K. E. Bisshopp, "Rodrigues' Formula and the Screw Matrix," *ASME Journal of Engineering for Industry*, pp. 179-185, 1969.
- [23] R. G. Fenton and X. Shi, "Comparison of Methods for Determining Screw Parameters of Finite Rigid Body Motion From Initial and Final Position Data," *Advances in Design Automation*, vol. 19, pp. 433-439, 1989.

- [24] J. S. Beggs, "Chapitre 2," in *Advanced Mechanism*, 1966, pp. 38-41.
- [25] J. S. Beggs, "Chapitre 3," in *Kinematics*: Hemisphere, Springer Verlag, 1983, pp. 41-47.
- [26] J. Angeles, "Automatic Computation of the Screw Parameters of Rigid Body Motions. PART I: Finitely Separated Positions," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 108, pp. 32-38, 1986.
- [27] J. Angeles, "Rigid Body Pose and Twist Estimation in the Presence of Noisy Redundant Measurements," *Proc. Eighth CISM-IFTOMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators, Cracow*, pp. 69-78, 1990.
- [28] A. J. Laub and G. R. Shiflett, "A Linear Algebra Approach to the Analysis of Rigid Body Displacement from Initial and Final Position Data," *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 49, pp. 213-216, 1982.
- [29] C. W. Spoor and F. E. Veldpaus, "Rigid Body Motion Calculated From Spatial Co-ordinates of Markers," *Journal of Biomechanics*, vol. 13, pp. 391-393, 1980.
- [30] B. K. P. Horn, H. M. Hilden, and S. Negahdaripour, "Closed Form Solution of Absolute Orientation Using Orthonormal Matrices," *J. Opt Soc Am Ser A*, vol. 5, pp. 1127-1135, 1988.
- [31] F. E. Veldpaus, H. J. Woltring, and L. J. M. G. Dortmans, "A Least Squares Algorithm for the Equiform Transformation From Spatial Marker Co-ordinates," *Journal of Biomechanics*, vol. 21, pp. 45-54, 1988.
- [32] k. S. Arun, T. S. Huang, and S. D. Bolstein, "Least Squares Fitting of Two 3D Point Sets," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 9, pp. 698-700, 1987.
- [33] S. Umeyama, "Least Squares Estimation of Transformation Parameters Between Two Point Patterns," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 13, pp. 376-380, 1991.
- [34] Inge Soderkvist and P. A. Wedin, "Determining the Movements of the Skeleton Using Well-Configured Markers," *Journal of Biomechanics*, vol. 26, pp. 1473-1477, 1993.
- [35] J. H. Challis, "A Procedure for Determining Rigid Body Transformation Parameters," *Journal of Biomechanics*, vol. 28, pp. 733-737, 1995.

- [36] B. K. P. Horn, "Closed Form Solution of Absolute Orientation Using Unit Quaternion," *Optical Society of America*, vol. 4, pp. 629-642, 1987.
- [37] G. L. Kinzel, A. S. Hall, and B. M. Hillberry, "Measurement of the Total Motion Between Two Body Segments-I :Analytical Development," *Journal of Biomechanics*, vol. 5, pp. 93-105, 1972.
- [38] K. C. Gupta and P. Chutakanonta, "Accurate Determination of Object Position from Imprecise Data," *Journal of Mechanical Design*, vol. 120, pp. 559-564, 1998.
- [39] M. W. Walker and L. Shao, "Estimating 3D Location Parameters Using Dual Number Quaternions," *CVGIP: Image Understanding*, vol. 54, pp. 358-367, 1991.
- [40] H. Zhuang and R. Sudhakar, "Simultaneous Rotation and Translation Fitting of Two 3D Point Sets," *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 27, pp. 127-131, 1997.
- [41] A. J. Laub and G. R. Shiflett, "A Linear Algebra Approach to the Analysis of Rigid Body Velocity From Position and Velocity Data," *Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control*, vol. 105, pp. 92-95, 1983.
- [42] J. Angeles, "Automatic Computation of the Screw Parameters of Rigid Body Motions. PART II: Infinitesimally Separated Positions," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 108, pp. 39-43, 1986.
- [43] J. Angeles, "On Robustness and Invariance in Motion Estimation Algorithms," *The Fourth International Symposium on the 3 D Analysis of Human Movement, Grenoble, France*, 1996.
- [44] G. R. Shiflett and A. J. Laub, "The Analysis of Rigid Body Motion From Measured Data," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 117, pp. 578-584, 1995.
- [45] H. J. Sommer and F. L. Buczek, "Experimental Determination of the Instant Screw Axis and Angular Acceleration Axis," *Bioengineering Conference, Proceedings of the 1990 Sixteenth Annual Northeast*, pp. 141-142, 1990.
- [46] H. J. Sommer, "Determination of First and Second Order Instant Screw Parameters From Landmarks Trajectories," *Journal of Mechanical Design*, vol. 114, pp. 274-282, 1992.

- [47] J. H. Challis, "An Examination of Procedures for Determining Body Segment Attitude and Position From Noisy Biomechanical Data," *Med. Eng. Phys.*, vol. 17, pp. 83-90, 1995.
- [48] D. W. Eggert, A. Lorusso, and R. B. Fisher, "Estimating 3D Rigid Body Transformations: A Comparison of Four Major Algorithms," *Machine Vision and Applications*, pp. 272-290, 1997.
- [49] L. Chèze, B. J. Fregly, and J. Dimnet, "Determination of Joint Functional Axes From Noisy Marker Data Using the Finite Helical Axis," *Human Movement Science*, pp. 1-15, 1998.
- [50] M. Bottlang, J. L. Marsh, and T. D. Brown, "Factors Influencing Accuracy of Screw Axis Detection With A D.C Based Electromagnetic Tracking System," *Journal of Biomechanical Engineering*, vol. 120, pp. 431-435, 1998.
- [51] T. R. Duck, L. M. Ferreira, G. J. W. King, and J. A. Johnson, "Assessment of Screw Displacement Axis Accuracy and Repeatability for Joint Kinematic Description Using an Electromagnetic Tracking Device," *Journal of Biomechanics*, vol. IN PRESS, 2003.
- [52] R. G. Fenton and R. A. Willgoss, "Comparison of Methods for Determining Screw Parameters of Infinitesimal Rigid Body Motion From Position and Velocity Data," *Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control*, vol. 112, pp. 711-716, 1990.
- [53] S. Fioretti, L. Jetto, and T. Leo, "Reliable in Vivo Estimation of the Instantaneous Helical Axis in Human Segmental Movements," *IEEE Transactions On Biomedical Engineering*, vol. 37, 1990.
- [54] S. Gupta, "Linear Quaternion Equations With Application to Spacecraft Attitude Propagation," *IEEE*, vol. 1, pp. 69-76, 1998.
- [55] J. Wittenburg, "Dynamics of Systems of Rigid Bodies," *B. G. Teubner Stuttgart*, 1977.
- [56] L. Johansson, "A Note on the Computation of the Euler Parameters," *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 123, pp. 719-722, 2001.
- [57] G. A. Wood, "Data Smoothing and Differentiation Procedures in Biomechanics," *Exercise and Sport Sciences Reviews*, vol. 10, pp. 308-362, 1982.
- [58] G. Giakas, L. K. Stergioulas, and A. Vourdas, "Time-frequency Analysis and Filtering of Kinematic Signals With Impacts Using the Wigner Function:

- Accurate Estimation of the Second Derivative," *Journal of Biomechanics*, vol. 33, pp. 567-574, 2000.
- [59] A. R. Ismail and S. S. Asfour, "Discrete Wavelet Transform: A Tool in Smoothing Kinematic Data," *Journal of Biomechanics*, vol. 32, pp. 317-321, 1999.
  - [60] F. J. Alonso, J. M. Del Castillo, and P. Pintado, "Application of singular spectrum analysis to the smoothing of raw kinematic signals," *Journal of Biomechanics*, in press.
  - [61] G. Giakas and V. Baltzopoulos, "Optimal Digital Filtering Requires a Different Cut-Off Frequency Strategy for the Determination of the Higher Derivatives," *Journal of Biomechanics*, vol. 30, pp. 851-855, 1997.
  - [62] G. Giakas and V. Baltzopoulos, "A Comparaison of Automatic Filtering Techniques Applied to Biomechanical Walking Data," *Journal of Biomechanics*, vol. 30, pp. 847-850, 1997.
  - [63] J. H. Challis, "A Procedure for the Automatic Determination of Filter Cutoff Frequency for the Processing of Biomechanical Data," *Journal of Applied Biomechanics*, vol. 15, pp. 303-317, 1999.
  - [64] D. Winter, "Biomechanics & Motor Control of Human Movement," *New York*, 2nd Edition 1990.
  - [65] A. Cappello, P. F. L. Palombara, and A. Leardini, "Optimization and Smoothing Techniques in Movement Analysis," *International Journal of Bio-Medical Computing*, vol. 41, pp. 137-151, 1996.
  - [66] C. W. Spoor, "Explanation, Verification and Application of Helical-Axis Error Propagation Formulas," *Human Movement Science*, vol. 3, pp. 95-117, 1984.
  - [67] A. D. Lange, R. Huiskes, and J. M. G. Kauer, "Measurement Errors in Roentgen-Stereophotogrammetric Joint-Motion Analysis," *Journal of Biomechanics*, vol. 23, pp. 259-269, 1990.
  - [68] Cesare Angeloni, Patrick O. Riley, and D. E. Krebs, "Frequency Content of Whole Body Gait Kinematic Data," *IEEE Tansactions on Rehabilitation Engineering*, vol. 2, pp. 40-46, 1994.
  - [69] I. Soderkvist and P. A. Wedin, "Determining the Movements of the Skeleton Using Well-Configured Markers," *Journal of Biomechanics*, vol. 26, pp. 1473-1477, 1993.

- [70] A. Cappozzo, A. Cappello, U. D. Croce, and F. Pensalfini, "Surface-Marker Cluster Design Criteria for 3-D bone Movement Reconstruction," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 44, pp. 1165-1174, 1997.
- [71] A. D. Lange, R. Huiskes, and J. M. G. Kauer, "Effects of Data Smoothing on the Reconstruction of Helical Axis Parameters in Human Joint Kinematics," *Journal of Biomechanical Engineering*, pp. 107-113, 1990.
- [72] M. Stokdijk, C. G. M. Meskers, H. E. J. Veeger, Y. A. D. Boer, and P. M. Rozing, "Determination of the Optimal Elbow Axis for Evaluation of Placement of Prostheses," *Clinical Biomechanics*, vol. 14, pp. 177-184, 1999.
- [73] H. Mecheri, R. Aissaoui, N. Hagemeister, and J. A. D. Guise, "Comparison of eight algorithms for the determination of the finite helical axis of the human knee joint," presented at ISAB, Montréal, Québec, CANADA, 4-6 Avril, 2005.
- [74] R. Aissaoui, H. Mecheri, and J. A. D. Guise, "Estimation de la précision de l'axe hélicoïdale fini pour la représentation du mouvement articulaire : application au genou.," presented at 72ème Congrès de l'Acfas, Montréal, 10-14 Mai, 2004.
- [75] R. Aissaoui, H. Mecheri, and J. A. D. Guise, "Comparison and validation of four major techniques for estimating the instantaneous helical axis from measured data," presented at IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, San Francisco, California, USA, 1-5 September, 2004.